Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Леня очень любит математику, а еще Леня очень любит функции, сейчас он изучает следующую функцию: $-(\frac{a \cdot b}{c} + \frac{a \cdot c}{b} + \frac{b \cdot c}{a} \quad + 5 \cdot x)$, где a, b, c принимают любые целые значения от -20 до 20 включительно. Он выяснил, что при $x = 5$ максимальное значение, которое может принимать функция равняется 427. Помогите Лене найти максимальное значение функции при $x = 10$.

Ответ: В условии задачи была допущена ошибка, вместо функции $-(\frac{a \cdot b}{c} + \frac{a \cdot c}{b} + \frac{b \cdot c}{a} \quad + 5 \cdot x)$ должна была рассматриваться функция $-(\frac{a \cdot b}{c} + \frac{a \cdot c}{b} + \frac{b \cdot c}{a} \quad - 5 \cdot x)$ для нее максимальным значением в предложенных ограничениях на a, b и c действительно является 427. В полный балл оценивались корректные решения, которые рассматривали любую из этих функций в предположении, что максимум равняется 427. Жюри приносит свои извинения за допущенную опечатку! Далее приводится решение для корректной функции, которое, впрочем, практически не отличается от решения для приведенной в условии функции. Рассмотрим сумму двух функций $F(a,b,c) + G(x)$, где $F(a,b,c) = -(\frac{a \cdot b}{c} + \frac{a \cdot c}{b} + \frac{b \cdot c}{a} \quad)$, а $G(x) = 5 \cdot x$, заметим, что максимум $F(a,b,c)$ не зависит от x, значит мы можем вычислить его основываясь на знании о том, что максимум суммы $F(a,b,c) + G(x) = [\text{при } x = 5] = 427$. Получаем, что $F(a,b,c) = 427 - 5 \cdot x = 427 - 5 \cdot 5 = 427 - 25 = 402$.
Подставим $F(a,b,c)$ в $F(a,b,c) + G(x)$ при $x = 10$, получаем $402 + 5 \cdot 10 = 452$. В случае функции приведенной в условии задачи в рассуждениях меняется только знак при $G(x)$ и ответ равняется 402.

Задание 2. (25 баллов) Андрей очень любит графы, а еще больше он любит находить графы с какими-нибудь интересными свойствами. Сейчас он занят поиском графа, в котором есть хотя бы одна вершина степени 1, хотя бы одна вершина степени 1000 и среднее степеней соседей по всем вершинам одинаковое. Помогите Андрею либо найти любой граф, подходящий под данные условия, либо доказать, что таких графов не существует. Под графом в данной задаче подразумевается *обыкновенный* граф, то есть неориентированный граф без петель и кратных ребер. Напомним, что под степенью вершины подразумевается количество ребер, исходящих из нее.

Ответ: Существует несколько примеров графов, подходящих под условие задачи. В качестве примера приведем самую простую на наш взгляд конструкцию. Рассмотрим вершину A со степенью $10^6 - 10^3 + 1$. Каждый из её соседей (будем говорить, что это вершины типа B) будет соединен ещё с 999 вершинами степени 1. Давайте теперь посчитаем, требуемую в графе характеристику.
У всех соседей вершины A степень 1000. Значит среднее степеней её соседей равно 1000. У каждого из соседей вершин типа B, кроме вершины A, ровно по 1 соседу (это листья по построению). Тогда среднее степеней их соседей равно степени этого единственного соседа, а значит тоже равно 1000.
У вершин типа B есть 999 соседей со степенью 1 и 1 сосед со степенью $10^6 - 10^3 + 1$. Среднее степеней соседей в этом случае равно $\frac{10^6 - 10^3 + 1 + 999}{1000} = 1000$.
Получаем, что среднее степеней соседей каждой из вершин равно 1000. При этом в графе есть вершины степени 1 и вершины степени 1000, а значит условие задачи выполнено.

Задание 3. (25 баллов) У Лёни есть строка длины 90, состоящая из 0 и 1. Он называет строки длины 68, которые состоят из 0 и 2 *шаблонами.* Лёня любит прикладывать шаблоны к строке так, чтобы шаблон не выходил за границы строки. Особенно ему нравится, если каждая двойка в шаблоне покрывает единицу в строке. Такие покрытия он называет *хорошими.* Например, для строки 11100 и шаблона 200 существует два хороших покрытия: при приложении шаблона, начиная с первого, второго и третьего символа.

Сегодня Лёня нашёл очередной шаблон и уже посчитал, сколько существует хороших покрытий с этим шаблоном и своей строкой.
Но Лёня хочет большего: ему интересно, чему равна сумма хороших вхождений по всем парам строк длины 90 и шаблонов длины 68. И вам предлагается помочь Лене с этим непростым вопросом.
Например, при длине строк 2 и длине шаблонов 1 у Лёни есть 4 различных строки (00, 01, 10 и 11) и 2 различных шаблона (0 и 2). Шаблон 0 не содержит двоек, поэтому его можно приложить в любой из позиций к любой из строк (8 вариантов). Шаблон 2 можно приложить лишь к позициям, на которых стоят единицы (4 варианта). Всего получаем 12 хороших вхождений.

Ответ: Пусть у Лёни есть строка длины Nи шаблон длины K, где $N \geq K$. Рассмотрим произвольный шаблон, в котором ровно n двоек и будем прикладывать его к началу строки. Посчитаем, сколько существует строк для которых такое наложение будет *хорошим.* Под каждой из двоек в строке должны стоять единицы, а во всех остальных позициях может стоять как 0, так и 1. Итого, получаем что для n позиций строки у нас 1 вариант символа, а для остальных $N - n$ есть 2 варианта. Значит таких строк - 2^{N-n}. Заметим, что наши рассуждения остаются верными и для приложения шаблона в произвольной из $N - K + 1$позиций.

Также мы знаем, что количество шаблонов с n двойками равно $C_K^n = \frac{K!}{n!(K-n)!}$, то есть количеству способов выбрать подмножество из n позиций для двоек из множества всех позиций (размера K).
Теперь соберем всё вместе и преобразуем выражение.
$Answer = (N - K + 1)\sum_{n=0}^{K} C_K^n * 2^{N-n} = (N - K + 1) * 2^{N-K}\sum_{n=0}^{K} C_K^n * 2^{K-n} * 1^n$ =[по биному Ньютона] = $(N - K + 1) * 2^{N-K} * (1 + 2)^K = (N - K + 1) * 2^{N-K} * 3^K$.
Если подставить числа из задачи, то получим ответ $23 * 2^{68} * 3^{68}$.

Задание 4. (25 баллов) Вальдемар очень необычный человек. Каждый раз, приходя домой после тяжелого дня, он садится перед камином и начинает заниматься своим любимым делом. Сначала он выбирает некоторое число $N > 2$. Затем он находит все пары различных натуральных чисел, которые дают в сумме N. Для каждой такой пары чисел Вальдемар находит *xor* этой пары, а затем перемножает все полученные значения. Конечно, удовольствие ему доставляет сам процесс. Но его *особенно радует*, когда получившийся результат делится на N. Теперь он спрашивает вас, при каких N он в итоге будет особенно рад.
Например: Пусть N равно 5. Тогда существует две пары натуральных чисел, которые дают в сумме 5 - это (1, 4) и (2, 3).

$$1\, xor\, 4 = 5$$
$$2\, xor\, 3 = 1$$

Произведение этих чисел равно 5, и так как 5 делится на N, то Вальдемар будет особенно рад.

Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются.
Например, $7_{10}\, xor\, 5_{10} = 111_2\, xor\, 10_2 = 101_2 = 5_{10}$

Ответ: Давайте в первую очередь покажем, что для всех чисел, которые не являются степенью двойки Вальдемар будет особенно счастлив.
В первую очередь заметим, что в двоичной записи числа ровно одна единица тогда и только тогда, когда число является степенью двойки. Мы рассматриваем число x, которое не является степенью двойки, поэтому мы знаем, что в его двоичной записи содержится хотя бы две единицы. Рассмотрим разложение x на два слагаемых, одно из которых в двоичной записи содержит ровно одну единицу на одной из позиций, в которой в x стоит единица. Назовем такое слагаемое n. Тогда легко показать, что $n\, xor\, (x - n) = x$. Действительно, в этом случае результат операции побитового сложения во всех позициях будет совпадать с x. Значит произведение уже будет делиться на x.

Далее покажем, что для всех степеней двойки, кроме 4 это свойство тоже выполняется.
Заметим, что любая степень двойки в условиях задачи (так как числа больше 2) четна. Рассмотрим пару чисел $(a,\ b)$, таких, что их сумма равна четному числу. Заметим, что раз сумма четна, то четность этих двух чисел совпадает. А значит, совпадает и последняя цифра в двоичной записи, из чего следует, что xorэтой пары будет четным.
Для числа 2^Nсуществует $2^{N-1}-1$ способ разложить это число на 2 *различных* слагаемых. Каждая из таких пар делится хотя бы на одну двойку. Таким образом произведение будет делиться хотя бы на 2 в степени $2^{N-1}-1$.
Достаточно показать, что для $N > 2$выполняется $2^{N-1}-1\ \geq\ N$.
Воспользуемся методом математической индукции.
База: при $N = 3$выполняется $2^2-1\ \geq\ 3$.
Предположение индукции: пусть для $N = K$выполнено условие.
Шаг индукции: покажем, что это верно и для $N = K + 1$.
$2^K\ -\ 1 \geq 2\ *\ (2^{K-1}-1)\ \geq\ 2\ *\ K\ \geq K\ + 1$ - доказано.
Мы показали, что для всех чисел кроме 4 условие выполняется. Осталось разобрать случай с 4 ручками. Существует ровно одна пара различных натуральных чисел, дающих в сумме 4: 1 и 3. Их xorравен 2, поэтому это число нам не подходит.
Ответ: Вальдемар будет особенно рад при всех натуральных числах больше 2, кроме 4.