**Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100**

**Задание 1.** (20 баллов) По замкнутой трассе непрерывно едут автомобили и мотоциклы. Все мотоциклы имеют скорость $v_1$ = 100 км/ч, а все автомобили – скорость $v_2$ = 90 км/ч. Мимо неподвижного наблюдателя каждые 10 секунд проезжает мотоцикл, а каждые 12 секунд – автомобиль. Как соотносятся количества мотоциклов и автомобилей на трассе?

**Решение**

Как автомобили, так и мотоциклы разделены на трассе равными расстояниями, поскольку проезжают мимо наблюдателя через равные промежутки времени.

Можно представить себе, что мотоциклы и автомобили – неподвижны, тогда как наблюдатель движется мимо них со скоростями $v_1$ = 100 км/ч и $v_2$ = 90 км/ч, соответственно. Тогда ясно, что что расстояние между соседними мотоциклами - $l_1 = v_1\cdot\Delta t_1$, где $\Delta t_1$ = 10 с – временной интервал между появлениями мотоциклов рядом с наблюдателем. Аналогично, для автомобилей $l_2 = v_2\cdot\Delta t_2$. Получается, что $v_1$ = 100 км/ч = 27.(7) м/с, $v_2$ = 90 км/ч = 25 м/с, откуда $l_1$ = 277.8 м, $l_2$ = 300 м.

Пусть длина трассы равна $L$. Тогда $N_1 = L/l_1$, $N_2 = L/l_2$ – количества мотоциклов и автомобилей на трассе. Соответственно, отношение количества мотоциклов к количеству автомобилей –

$$N_1/N_2 = l_2/l_1 = 300/277.8 = 1.08\ ;\ N_2/N_1 = 0.926.$$

Можно без расчета значений $l_1$ и $l_2$ сразу написать, что

$$N_1/N_2 = l_2/l_1 = v_2\cdot\Delta t_2/(v_1\cdot\Delta t_1) = (90\text{ км/ч})\cdot(12\text{ с})/(100\text{ км/ч})\cdot(10\text{ с}) = 108/100 = 1.08.$$

**Ответ:** $N_1/N_2$ = 1.08.

**Задание 2.** (20 баллов) Двое приятелей собираются попасть из пункта ***A*** в пункт ***B***. Первый отправляется на велосипеде с постоянной скоростью $v_1$ = 18 км/час. Второй же вызывает такси. Такси отправляется из пункта ***B*** в тот же момент времени по той же дороге, со скоростью $v_T$ = 30 км/час. Вызвавший такси решает идти навстречу пешком, со скоростью $v_2$ = 6 км/час. В момент встречи, такси его забирает и разворачивается в пункт B, двигаясь с той же скоростью $v_T$. Выяснить, кто из приятелей попадёт в пункт B скорее.

**Решение**

Пусть расстояние между пунктами ***A*** и ***B*** равно $L$. Первый из приятелей, на велосипеде, проделает этот путь за время $t_1 = L/v_1 = L/(18\text{ км/час})$.

Второй из приятелей идёт навстречу такси, их скорость сближения составляет $v_T + v_2$ = 36 км/час. Это значит, что до встречи пройдёт время $t_{21} = L/(v_T + v_2) = L/(36\text{ км/час})$. За это время пешеход пройдёт путь $L_{21} = v_2\cdot L/(v_T + v_2) = L/6$ в направлении пункта **B.**

Для возвращения в пункт **B** такси со вторым из приятелей проделает путь $L_{22} = L - v_2\cdot L/(v_T + v_2) = v_T\cdot L/(v_T + v_2) = = 5L/6$ за время $t_{22} = v_T\cdot L/(v_T + v_2)/v_T = L/(v_T + v_2) = t_{21}$.

Таким образом, суммарное время перемещения второго приятеля в пункт **B** составит $t_2 = 2\cdot t_{21} = 2\cdot L/(v_T + v_2) = L/(18\text{ км/час}) = t_1$.

**Ответ:** Приятели достигнут пункта **В** одновременно.

**Задание 3.** (20 баллов) В теплоизолированном сосуде находится вода объёмом *V* при температуре $T_1$. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре $T_2$. Найти температуру системы $T_k$ после установления равновесия. Плотность воды равна $\rho_0$, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Известно, что лёд полностью растаял.

**Решение:**

$$|Q| = -c_Л m_Л t_2 + \lambda_Л m_Л + c_в m_Л t_k$$

$$|Q| = c_в m_в (t_1 - t_k)$$

$$m_в = V\rho_0$$

**Из (1) и (2)** ➔ $t_k = \frac{c_в V\rho_0 t_1 + c_Л m_Л t_2 - \lambda_Л m_Л}{c_в(m_л + V\rho_0)}$.

**Задание 4.** (20 баллов) В трех теплоизолированных сосудах находится по 1 литру воды, при температурах $t_1$ = 90 °C, $t_2$ = 60 °C и $t_3$ = 30 °C, соответственно. Из первого и третьего сосудов во второй переливают по 100 г воды, а после выравнивания температуры – переливают по 100 г воды из второго сосуда в первый и третий. Сколько раз нужно будет повторить всю процедуру для того, чтобы разность температур между 1-м и 3-м сосудами стала меньшей 30 °C? Считать, что теплоемкость воды $c_в$ от температуры не зависит.

**Решение**

Пусть $m$ = (0.001 м³)·(1000 кг·м⁻³) = 1 кг – исходная масса воды в каждом из сосудов, $\Delta m$ = 0.1 кг – переливаемая масса. Найдём температуру $t$, которая установится в сосуде 2 (том, где исходная температура – $t_2$ = 60 °C) после добавления туда порций воды $\Delta m$ из 1-го и 3-го сосудов. По закону сохранения энергии в ходе теплообмена получится, что

$$m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left((t - 90°C) + (t - 30°C)\right) = 0,$$

после чего

$$t \cdot (m + 2\Delta m) = m \cdot 60°C + \Delta m \cdot 120°C = (m + 2\Delta m) \cdot 60°C \Rightarrow t = 60°C.$$

Таким образом, темпратура $t_2$ = 60 °C в сосуде 2 не изменяется. Отметим сразу, что эта температура не будет изменяться и на следующих шагах повторения процедуры, поскольку изменения температуры в сосудах 3 и 1 ($\pm\Delta t$) будут оставаться равными по модулю и противоположными по знаку. Тогда

$$m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left(\left(t - (90°C - \Delta t)\right) + \left(t - (30°C + \Delta t)\right)\right) =$$
$$= m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot (2t - 120°C) = 0 \Rightarrow t = 60°C.$$

Пусть $t_{1,\,n+1}$ – температура воды в сосуде 1 на (n+1)-м шаге процесса переливания, а именно – после того, как в этот сосуд возвращают массу $\Delta m$ из сосуда 2. По закону сохранения энергии,

$$(m - \Delta m) \cdot c_в \cdot \left(t_{1,\,n+1} - t_{1,\,n}\right) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left(t_{1,\,n+1} - 60°C\right) = 0,$$

откуда изменение температуры в сосуде 1 на шаге процесса переливания получается следующим:

$$t_{1,n+1} - t_{1,n} \equiv \Delta t_{1,n+1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \left(t_{1,n} - 60°C\right).$$

Аналогично, в третьем сосуде

$$t_{3,n+1} - t_{3,n} \equiv \Delta t_{3,n+1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \left(t_{3,n} - 60°C\right).$$

В частности, на 1-м шаге

$$t_{1,1} - t_{1,0} \equiv \Delta t_{1,1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \left(t_{1,0} - 60°C\right) = -\frac{\Delta m}{m} \cdot (90°C - 60°C) = -\frac{\Delta m}{m} \cdot 30°C .$$

$$t_{3,1} - t_{3,0} \equiv \Delta t_{3,1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \left(t_{3,0} - 60°C\right) = -\frac{\Delta m}{m} \cdot (30°C - 60°C) = +\frac{\Delta m}{m} \cdot 30°C .$$

Видно, что изменения в сосудах 1 и 3 температуры действительно равны по модулю и противоположны по знаку.

В дальнейшем, можно рассматривать следующие итерации процесса, напрямую пересчитывая температуры. Альтернативно, можно ввести температуры $t^*_{1,n} = t_{1,n} - 60°C$ и $t^*_{3,n} = t_{3,n} - 60°C$, для которых будут выполняться уравнения

$$\Delta t^*_{\nu,n+1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot t^*_{\nu,n}, \text{ где } \nu = 1, 3 .$$

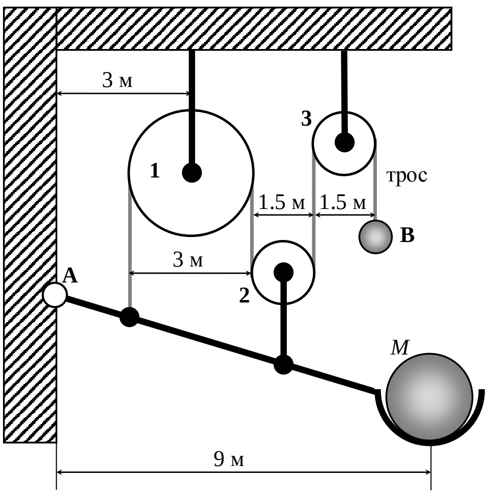
Эти уравнения снова можно использовать для прямого расчета температур на каждой итерации, либо получить решения в форме

$$t^*_{1,n+1} = \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)^n \cdot 30°C, t^*_{3,n+1} = \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)^n \cdot (-30°C) .$$

Получается, что разность температур в 1 и 3 сосудах (совпадающая с разностью $t^*_{1,n} - t^*_{3,n}$) станет меньшей 30 °C (а именно 28.7°C) на 7-м шаге. Подстановка численных значений показывает, что номер шага *n* удовлетворяет соотношению $0.9^n < 0.5$.

**Ответ:** На 7-м шаге.

**Задание 5.** (20 баллов) Ковш, показанный на Рисунке, может свободно вращаться вокруг точки **A** (в вертикальной плоскости). В ковше лежит груз массой *M* = 200 кг. Определить вес груза, который нужно разместить в точке **B** для того, чтобы система блоков **1**, **2**, **3** и трос могли удержать ковш неподвижным? Все блоки закреплены жестко. Блоки и ковш считать невесомыми, трос – невесомым и нерастяжимым.




**Решение**

Ковш с грузом представляет собой рычаг, который будет в равновесии тогда, когда сумма произведений всех сил, приложенных к нему, на плечи этих сил будет равной нулю. При этом, силы нужно рассматривать с учетом знака (направления).

Обозначим силу натяжения троса через *T*. Эта сила должна совпадать с искомым весом груза В, чтобы тот оставался неподвижным. Отметим, что массу груза В в этой задаче искать не обязательно, ответом она тоже не будет.

Из Рисунка следует, что на расстоянии 1.5 м от точки А вдоль горизонтальной оси к ковшу приложена сила *T*, направленная вверх. На расстоянии 5.25 м от точки А приложена сила 2Т, тоже направленная вверх. Будем считать направление «вверх» положительным, тогда уравнение баланса стержня примет вид

$$1.5 \cdot T + 5.25 \cdot 2T - 9 \cdot M \cdot g = 0 \Rightarrow$$
$$12 \cdot T = 9 \cdot M \cdot g = 17640\ H\ (\text{при } g = 9.8\ \text{м/с}^2);$$
$$T = 9 \cdot M \cdot g / 12 = 1470\ H.$$

При $g$ = 10 м/с$^2$ $T$ = 1500 Н.

**Ответ:** Вес груза **В** равен 1470 Н (1500 Н при $g$ = 10 м/с$^2$).

**Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100**

**Задание 1.** (20 баллов) Двое приятелей собираются попасть из пункта А в пункт В. Первый отправляется на велосипеде с постоянной скоростью $v_1$ = 18 км/час. Второй же вызывает такси. Такси отправляется из пункта В в тот же момент времени по той же дороге, со скоростью $v_T$ = 30 км/час. Вызвавший такси решает идти навстречу пешком, со скоростью $v_2$ = 6 км/час. В момент встречи, такси его забирает и разворачивается в пункт В, двигаясь с той же скоростью $v_T$. Выяснить, кто из приятелей попадёт в пункт В скорее.

**Решение**

Пусть расстояние между пунктами ***A*** и ***B*** равно *L*. Первый из приятелей, на велосипеде, проделает этот путь за время $t_1 = L/v_1 = L/(18$ км/час).

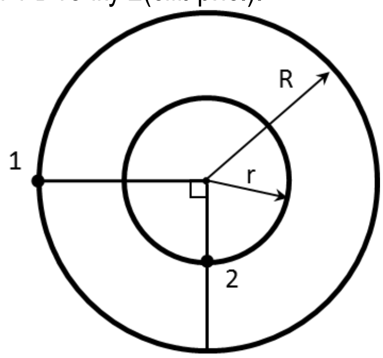
Второй из приятелей идёт навстречу такси, их скорость сближения составляет $v_T + v_2 = 36$ км/час. Это значит, что до встречи пройдёт время $t_{21} = L/(v_T + v_2) = L/(36$ км/час). За это время пешеход пройдёт путь $L_{21} = v_2 \cdot L/(v_T + v_2) = L/6$ в направлении пункта **В.**

Для возвращения в пункт **В** такси со вторым из приятелей проделает путь $L_{22} = L - v_2 \cdot L/(v_T + v_2) = v_T \cdot L/(v_T + v_2) = = 5L/6$ за время $t_{22} = v_T \cdot L/(v_T + v_2)/v_T = L/(v_T + v_2) = t_{21}$.

Таким образом, суммарное время перемещения второго приятеля в пункт **В** составит $t_2 = 2 \cdot t_{21} = 2 \cdot L/(v_T + v_2) = L/(18$ км/час) $= t_1$ .

**Ответ:** Приятели достигнут пункта **В** одновременно.

**Задание 2.** (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса r. Вокруг острова, в диапазоне расстояний от r до R от его центра, находится вода, и эта вода движется с угловой скоростью ω. При перемещении на остров собственная скорость лодки направлена перпендикулярно течению. Найти значение скорости лодки U в стоячей воде, если лодка переместилась из точки 1 в точку 2(см. рис.).




**Решение**

ϕ=90˚ из рисунка

$$\omega t = \varphi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$U = \frac{R-r}{t} = \frac{2(R-r)\omega}{\pi}.$$

**Задание 3.** (20 баллов) В сосуде находится солёная вода (температура кристаллизации $t_0$ = -2 ˚С) массой $m_в$=1кг при температуре $t_1$ = 9˚С. В сосуд добавляют лёд(получен в результате замерзания дистиллированной воды) массой $m_л$= 500 гр при температуре $t_2$ = -41˚С. Найти конечную температуру $t_k$ системы и отношение n итоговой плотности жидкости к начальной. Плотность солёной воды относится к плотности дистиллированной как 11/10. Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/кг˚С, теплоёмкость солёной воды – $c_c$ = 3900 Дж/кг˚С, теплоёмкость льда – $c_л$ = 2200 Дж/кг˚С, удельная теплота плавления льда $\lambda_л$ = 0,33 МДж/кг.

Решение:

$$|Q| = c_л m_л (t_k - t_2)$$
$$|Q| = c_c m_в (t_1 - t_k)$$

Из (1) и (2) ➔ $t_k = \dfrac{c_c m_в t_1 + c_\Lambda m_\Lambda t_2}{c_c m_в + c_л m_л}$ = -2˚С

Температура $t_k < 0$ ➔ лёд не начнёт таять ➔ плотность не изменится ➔ n = 1.

**Задание 4.** (20 баллов) Считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R$ = 384 467 км, совершая полный оборот за 27.32 суток. На каком тогда расстоянии вращается, по круговой орбите, искусственный спутник Земли, имеющий скорость 266310 км/сутки?

**Решение**

Будем считать Землю неподвижным источником гравитационного поля. Для того, чтобы материальная точка (Луна, искусственный спутник) могла находиться на круговой орбите в гравитационном поле Земли, её центробежное ускорение

$$a_{цб} = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

должно по модулю совпадать с «гравитационным» ускорением, направленным к Земле:

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M_О}{R^2}. \tag{2}$$

В формулах (1-2) $v$ – скорость материальной точки, $R$ – радиус круговой орбиты, $M_О$ – масса Земли, $G$ – гравитационная постоянная. В данной задаче $M_О$ и $G$ считаются неизвестными, скорость же Луны можно найти по формуле

$$v_л = \frac{2\pi R_Л}{T_Л} = \frac{2\cdot 3.14159\cdot(384467\ \text{км})}{27.32\ \text{сут}} = 88420\ \text{км/сут}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что для тел, вращающихся вокруг Земли,

$$v^2 R = GM_О = \text{const}, \tag{4}$$

так что

$$v^2_{\text{спутник}} R_{\text{спутник}} = v_Л^2 R_Л \Rightarrow$$
$$R_{\text{спутник}} = \frac{v_Л^2}{v^2_{\text{спутник}}} R_Л = \left(\frac{88420}{266310}\right)^2 \cdot (384467\ \text{км}) = 42384\ \text{км}, \tag{5}$$

Отметим, что период обращения такого спутника равен одним суткам.

**Ответ:** Спутник вращается на расстоянии 42384 км.

**Задание 5.** (20 баллов) В некоторой системе, соприкасаются два газовых потока. Один из потоков движется со скоростью $v_1$, второй – со скоростью $v_2$. Температуры потоков одинаковы, равны $T$. Считать, что количества частиц, переходящих из одного потока в другой через единицу площади их соприкосновения равны $n \cdot V_T/4$, где $n$ – числовая плотность газа (количество молекул на единицу объёма), $V_T$ – средняя арифметическая скорость теплового движения частиц, которую можно принять известной и не зависящей от скорости движения потоков ($V_T = (8 \cdot R \cdot T/(\pi \cdot M))^{1/2}$, где $M$ – молярная масса газа, $R$ – универсальная газовая постоянная). Частицы газа в обоих потоках имеют массу $m$. Оценить силу трения, действующую на единичную площадь соприкосновения потоков.

**Решение**

Общая форма второго закона Ньютона может быть записана через производную импульса по времени:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (4)$$

Это значит, что сила трения, действующая между соприкасающимися потоками, будет равна скорости изменения их импульсов в результате взаимодействия.

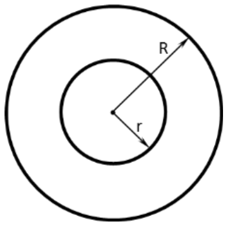
За единицу времени из первого потока во второй переходит $n \cdot V_T/4$ частиц, столько же – из второго потока в первый. Соответственно, первый поток передаст второму импульс $p_{1\text{->}2}$, равный $m \cdot v_1 \cdot n \cdot V_T/4$, второй же поток передаст первому импульс $p_{2\text{->}1} = m \cdot v_2 \cdot n \cdot V_T/4$.

Разность импульсов $(p_{1\text{->}2} – p_{2\text{->}1}) = m \cdot (v_1 – v_2) \cdot n \cdot V_T/4$ и будет силой трения, с которой первый поток действует на второй. Со стороны второго потока на первый действует противоположная сила $m \cdot (v_2 – v_1) \cdot n \cdot V_T/4$, в соответствии с 3-м законом Ньютона.

**Ответ:** Со стороны первого потока на второй действует сила трения $F = m \cdot (v_1 – v_2) \cdot n \cdot V_T/4$.

**Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100**

**Задание 1.** (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса r. Вокруг острова находится вода, в диапазоне расстояний от r до R от его центра, и эта вода движется с угловой скоростью ω. Скорость лодки в стоячей воде U. Найти расстояние L, на которое переместится лодка при переплывании на остров, если её собственная скорость будет направлена по радиусу к центру острова.



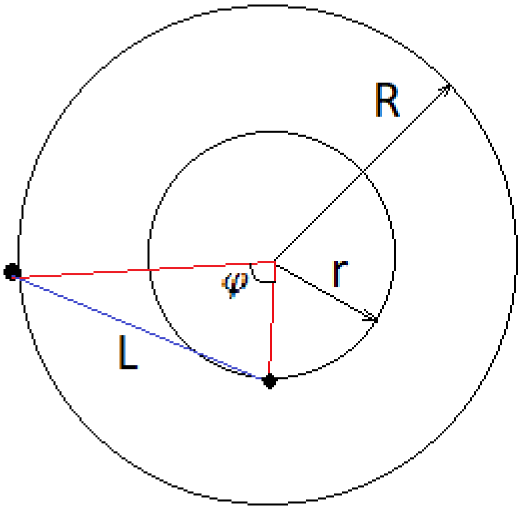

**Решение**

Время, которое лодка будет двигаться:

$$t = \frac{R-r}{U}$$

Угол, на который «повернётся» лодка:

$$\varphi = \omega t = \frac{\omega}{U}(R-r)$$

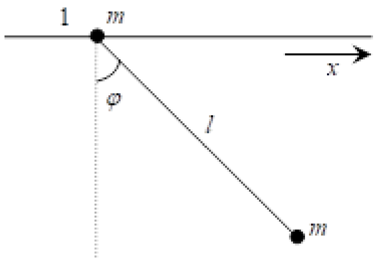



По теореме косинусов найдём L:

$$L^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$$

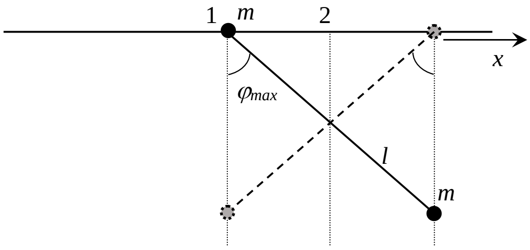
$$L = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\frac{\omega}{U}(R-r)\right)}.$$

**Задание 2.** (20 баллов) На рисунке изображен плоский маятник, в точке крепления которого (1 на Рисунке) находится масса $m_1$, свободно перемещающаяся вдоль оси *x*. Эта масса соединена с грузом такой же массы невесомым стержнем длины *l*. В начале движения маятник отклонен на угол φ от вертикали, начальные скорости обеих масс равны нулю. Найти амплитуду колебаний точки крепления маятника вдоль *x*.




**Решение**

На рисунке ниже показаны крайние положения маятника. Положение оси симметрии 2 в ходе колебаний не изменяется, поскольку совпадает с x-координатой центра инерции маятника, а внешних сил, направленных вдоль оси x, нет.




Примем крайнее положение точки 1 за нулевую координату вдоль оси x. Тогда, координата центра инерции $x_C$ даётся формулой

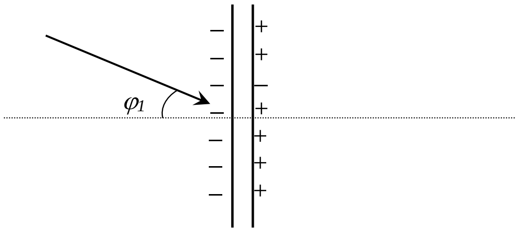
$$x_C = \frac{m \cdot l \sin(\varphi)}{m+m} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\varphi).$$

Из рисунка видно, что искомая амплитуда колебаний точки 1

$$x_{1,\max} - x_{1,\min} = 2 \cdot x_C = l \cdot \sin(\varphi)$$

**Ответ:** амплитуда колебаний точки 1 равна $l \cdot \sin(\varphi)$.

**Задание 3.** (20 баллов) Частица, имеющая массу *m* и заряд *q*, движется сквозь плоский конденсатор, прозрачный для этой частицы, под углом $\varphi_1$ к оси, перпендикулярной его пластинам, с начальной скоростью $v_1$. На пластинах есть заряд $\pm q$. Известна также емкость конденсатора *C*. Как изменится направление вектора скорости частицы после прохождения сквозь конденсатор?




**Решение**

Между пластинами конденсатора существует разность потенциалов

$$\Delta U = \frac{q}{C} \tag{1}$$

Пусть $\varphi_2$ – угол движения частицы после прохождения пластин конденсатора. В плоскости, параллельной пластинам, на частицу никаких сил не действует, так что компонента скорости, параллельная пластинам, не изменится, а модули скоростей «до» и «после» конденсатора ($v_1$ и $v_2$) будут связаны соотношением

$$v_1 \sin(\varphi_1) = v_2 \sin(\varphi_2) \tag{2}$$

С учетом прохождения разности потенциалов между пластинами, закон сохранения энергии, задающий новую скорость частицы $v_2$, будет иметь вид

$$m\frac{v_2^2}{2} + \Delta U \cdot q = m\frac{v_1^2}{2} \tag{3}$$

С учетом (1), соотношение (3) преобразуется к виду

$$m\frac{v_1^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}\right)^2+\Delta U\cdot q=m\frac{v_1^2}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q}. \qquad (4)$$

Полученный результат можно считать ответом задачи. Приемлемы также любые способы получения угла $\varphi_2$ либо его синуса из формулы (4). В частности,

$$\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q\right)^{-1/2}. \qquad (5)$$

Отметим, что формулировка задачи позволяет считать заряд частицы $q$ и модуль заряда на пластинах конденсатора, обозначенный через $\pm q$, одинаковыми. Соответственно, допустимо представление ответа в форме

$$\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{q^2}{C}\right)^{-1/2}. \qquad (5)$$

**Ответ:** $\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q\right)^{-1/2}$ (см. формулы выше).

**Задание 4.** (20 баллов) В теплоизолированном сосуде с площадью дна S находится вода массой $m_л$ при температуре $t_1$. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре $t_2$. Плотность воды равна $\rho_0$, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Известно, что лёд растаял не до конца. Найти массу льда, перешедшего в жидкое состояние ($\Delta m$). Может ли $\Delta m$ быть меньше нуля? Если да, то при каких условиях?

**Решение**

$|Q| = -c_Л m_Л t_2 + \lambda_1 \Delta m$ (1)

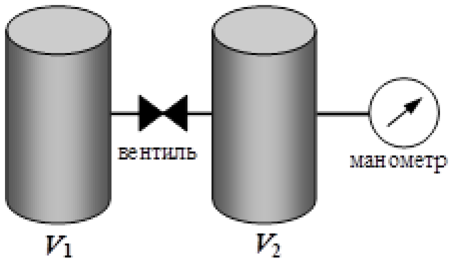
$|Q| = c_в m_в t_1$ (2)

Из (1) и (2) ➔ $\Delta m = \frac{c_в m_в t_1 + c_Л m_Л t_2}{\lambda_Л}$.

Если $\Delta m < 0$, часть воды, которая изначально была в сосуде, кристаллизуется.

Это возможно, если модуль величины теплоты, необходимой для изменения температуры льда до 0 больше, чем модуль теплоты, необходимой для изменения температуры воды до нуля.

**Задание 5.** (20 баллов) На рисунке изображены два объема, соединенные вентилем. Величины объемов известны, внутри находится воздух. Манометр измеряет давление в объёме $V_2$ относительно окружающей среды (то есть, разность между давлением $P(V_2)$ и атмосферным давлением). В начале процесса вентиль открыт, манометр показывает давление $P_0$. Затем вентиль закрыли, а воздуха в объем $V_1$ добавили, без изменения температуры. В дальнейшем вентиль был немного приоткрыт, так что давление в объёме $V_2$ увеличивалось постепенно, и зависимость показаний манометра от времени $P_{V2}(t)$ была записана (считать её известной). В конце концов, вентиль открыли полностью, после чего измерили манометром полученное давление $P_1$. Какова была зависимость от времени разности давлений в объемах $V_2$ и $V_1$?




**Решение**

Будем считать, что все значения давлений $P$, используемые ниже, заранее пересчитаны от фактических показаний манометра $P^*$ к абсолютному давлению, суммированием с атмосферным давлением $P_A$:

$$P = P^* + P_A.$$

Согласно закону Менделеева-Клайперона,

$$P_0 \cdot (V_1 + V_2) = \nu_0 RT, \tag{1}$$

где $R$ – универсальная газовая постоянная, $T$ – абсолютная температура, $\nu_0$ – исходное количество молей газа во всей системе. Аналогично,

$$P_1 \cdot (V_1 + V_2) = \nu_1 RT \; - \tag{2}$$

уравнение, связывающее конечное давление $P_1$ с конечным количеством молей $\nu_1$.

Из формул (1-2) получается, что количество молей, добавленных в объём $V_1$ после перекрывания вентиля ($\Delta\nu$), даётся соотношением

$$\Delta\nu \cdot RT = (P_1 - P_0)(V_1 + V_2) \tag{3}$$

В процессе перетекания газа из объёма 1 в объём 2, изменение количества молей и давления в объёме 2 связаны следующим образом:

$$\nu_2(t) \cdot RT = P_{V2}(t) \cdot V_2 = P_0 V_2 + \Delta\nu_2(t) \cdot RT \tag{4}$$

Отсюда,

$$\Delta\nu_2(t) \cdot RT = \left(P_{V2}(t) - P_0\right) \cdot V_2$$

В объёме $V_1$ давление будет постепенно уменьшаться:

$$P_{V1}(t) \cdot V_1 = P_0 V_1 + \left(\Delta\nu - \Delta\nu_2(t)\right) \cdot RT = P_0 V_1 + (P_1 - P_0) \cdot (V_1 + V_2) - \Delta\nu_2(t) \cdot RT \tag{5}$$

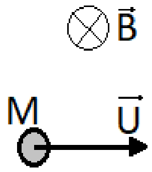
Из формул (4) и (5) получаем искомую разность давлений в объёмах 1 и 2:

$$\begin{aligned}\left(P_{V2}(t) - P_{V1}(t)\right) &= \Delta\nu_2(t) \cdot RT \cdot \left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_1}\right) - (P_1 - P_0) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \\ &= \left(P_{V2}(t) - P_0\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} - (P_1 - P_0) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \\ &= \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что в результирующей формуле присутствует только разность показаний манометра, так что знать атмосферное давление для её применения не нужно, при условии его постоянства.

**Ответ:** $\left(P_{V2}(t) - P_{V1}(t)\right) = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right).$

**Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100**




**Задание 1.** (20 баллов) Пуля массой *m* врезается в заряженный шар и застревает в нём. После столкновения заряд шара и пули стал равен *q*. В результате столкновения шар начал двигаться по радиусу *R* в магнитном поле с известной индукцией *B*. Необходимо найти начальную скорость пули $U_0$.

$F = Ma_ц = qUB$ Сила Лоренца

M – суммарная масса шара и пули

$$a_ц = \frac{qUB}{M} = \frac{U^2}{R}$$

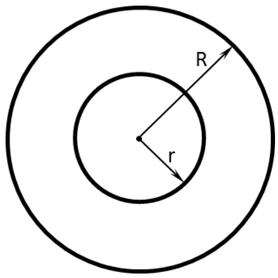
$U = \frac{RqB}{M}$ Скорость шара

Закон сохранения импульса в момент столкновения:

$$mU_0 = MU = RqB$$

$$U_0 = \frac{RqB}{m}.$$

Ответ: $U_0 = \frac{RqB}{m}$




**Задание 2.** (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса *r*. Вокруг острова находится вода, в диапазоне расстояний от r до *R* от его центра, и эта вода движется с угловой скоростью ω. Скорость лодки в стоячей воде *U* (*U* > *ωR*). Найти время *t*, за которое лодка переплывёт реку, если она будет двигаться перпендикулярно течению.

**Решение:**

Представим скорость лодки как вектор, который в каждый момент времени направлен под углом φ к радиальной прямой, проведенной из центра окружности, показанной на Рисунке, через точку, где находится лодка. Для того, чтобы лодка двигалась перпендикулярно течению, должно всегда выполняться условие

$$U \sin(\varphi) = \omega \cdot (R - x(t)), \tag{1}$$

где *x*(*t*) – расстояние, пройденное лодкой от берега к центру острова за время *t*.

При условии (1), скорость перемещения лодки вдоль радиальной прямой (к острову) будет следующей:

$$\frac{dx}{dt} = U \cos(\varphi), \tag{2}$$

откуда

$$dt = \frac{dx}{U \cos(\varphi)}. \tag{3}$$

Можно теперь получить из условия (1), что

$$\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \cdot (R - x(t))^2}{U^2}}, \tag{4}$$

после чего проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{R-r} \frac{dx}{\sqrt{U^2 - \omega^2 (R - x)^2}}. \tag{5}$$

Отметим, что интеграл (5) является «табличным», чем можно воспользоваться. Однако, проще не рассматривать соотношения (4), а сразу получить dx из формулы (1):

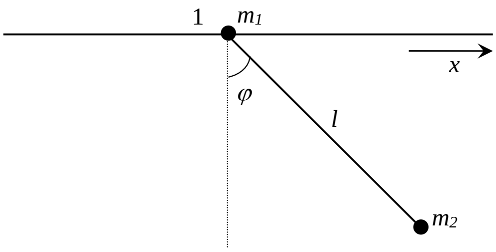
$$U\sin(\varphi)=\omega\cdot\left(R-x(t)\right)\Rightarrow dx=-\frac{U}{\omega}d\left(\sin(\varphi)\right)=-\frac{U}{\omega}\cos(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{6}$$

Теперь,

$$t=\int_0^t dt=\int_{\varphi(x=0)}^{\varphi(x=R-r)}\frac{-(U/\omega)\cos(\varphi)\,d\varphi}{U\cos(\varphi)}=\int_{\varphi(x=R-r)}^{\varphi(x=0)}\frac{d\varphi}{\omega}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(\varphi(x=0)-\varphi(x=R-r)\right)=$$
$$=\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{\omega R}{U}\right)-\arcsin\left(\frac{\omega r}{U}\right)\right). \tag{3}$$

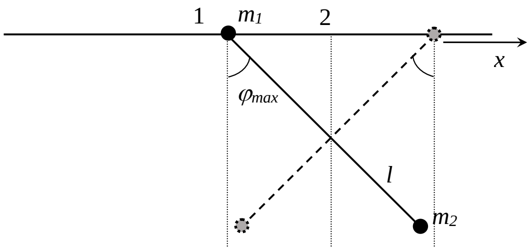
**Ответ:** $t=\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{\omega R}{U}\right)-\arcsin\left(\frac{\omega r}{U}\right)\right).$

**Задание 3.** (20 баллов) На рисунке изображен плоский маятник, в точке крепления которого (1 на Рисунке) находится масса $m_1$, свободно перемещающаяся вдоль оси $x$. Эта масса соединена с грузом массы $m_2$ невесомым стержнем длины $l$. Маятник совершает колебания с максимальной кинетической энергией $E_{max}$. Найти амплитуду движения точки крепления маятника вдоль оси $x$.




**Решение**

На рисунке ниже показан вариант крайних положений маятника. Конкретный вид рисунка зависит от соотношения масс $m_1$ и $m_2$, однако положение оси симметрии 2 всегда будет совпадать с x-координатой центра инерции маятника, которая в ходе колебаний остаётся постоянной, поскольку никаких внешних сил вдоль оси x не действует.




Примем, что в крайнем левом положении $x$-координата массы $m_1$ равна нулю. В этом случае, координата центра инерции $x_C$ даётся формулой

$$x_C=\frac{m_2\cdot l\sin(\varphi_{\max})}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot l\cdot\sqrt{1-\cos^2(\varphi_{\max})}\,.$$

Из рисунка видно, что искомая амплитуда колебаний маятника $\Delta x_1$ равна $2\cdot x_C$.

Разница потенциальных энергий маятника в его крайнем и среднем положениях равна максимальной кинетической энергии $E_{max}$. Отсюда,

$$E_{\max} = l \cdot \left(1 - \cos\left(\varphi_{\max}\right)\right) \cdot m_2 g \ .$$

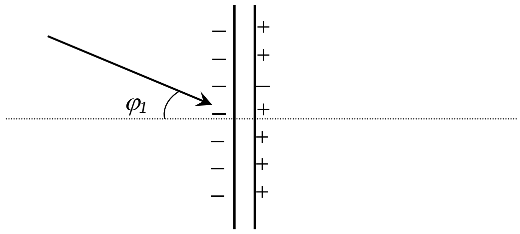
Соответственно,

$$\cos\left(\varphi_{\max}\right) = 1 - \frac{E_{\max}}{m_2 g l} \ .$$

$$x_C = \frac{m_2 \cdot l \sin\left(\varphi_{\max}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{E_{\max}}{m_2 g l}\right)^2} \ .$$

**Ответ:** $\Delta x_1 = 2x_C = \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot l \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{E_{\max}}{m_2 g l}\right)^2}$ .

**Задание 4.** (20 баллов) Частица, имеющая массу *m* и заряд *q*, движется сквозь систему из двух пластин, прозрачных для этой частицы, под углом $\varphi_1$ к оси, перпендикулярной пластинам, с начальной скоростью $v_1$. На пластинах есть заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\pm\sigma$. Расстояние между пластинами равно *d*, вся система вакуумирована. Как изменится направление вектора скорости частицы после прохождения пластин?




**Решение**

Будем полагать пластины бесконечными в направлениях, перпендикулярных нормали, поскольку иного в задаче не сказано. Для определения напряженности поля *E* между пластинами «обернем» любую из них плотно прилегающей поверхностью. Из закона Гаусса (1-го уравнения Максвелла), записанного в интегральной форме, тогда последует, что

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ . \tag{1}$$

Это значит, что между пластинами частица пройдёт разность потенциалов $\Delta U = E \cdot d = \sigma \cdot d / \varepsilon_0$ (на положительной пластине потенциал будет выше). Этот же результат можно получить с использованием известной формулы для ёмкости плоского конденсатора площади *S*, с зарядом $\pm q$ на обкладках:

$$\Delta U = \frac{q}{C} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot S / d} = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0} \ .$$

Пусть $\varphi_2$ – угол движения частицы после прохождения пластин. В плоскости, параллельной пластинам, на частицу никаких сил не действует, так что компонента скорости, параллельная пластинам, не изменится, и будет выполняться соотношение

$$v_1 \sin\left(\varphi_1\right) = v_2 \sin\left(\varphi_2\right) \ . \tag{2}$$

С учетом прохождения разности потенциалов между пластинами, закон сохранения энергии, задающий новую скорость частицы $v_2$, будет иметь вид

$$m\frac{v_2^2}{2}+\Delta U\cdot q=m\frac{v_2^2}{2}+\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q=m\frac{v_1^2}{2}. \tag{3}$$

С учетом (2), он преобразуется к виду

$$m\frac{v_1^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}\right)^2+\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q=m\frac{v_1^2}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}. \tag{4}$$

Полученный результат можно считать ответом задачи. Приемлемы также любые способы получения угла $\varphi_2$ либо его синуса из формулы (4). Отметим, в частности, что возможна запись решения в форме

$$\operatorname{tg}(\varphi_2)=\frac{\sin(\varphi_1)}{\sqrt{\cos^2(\varphi_1)-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}}, \text{ поскольку } \sin(\varphi)=\frac{\operatorname{tg}(\varphi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\varphi)}}.$$

**Ответ:** $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}$.

**Задание 5.** (20 баллов) В теплоизолированном сосуде с площадью дна $S$ находится вода массой $m_в$ при температуре $t_1$. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре $t_2$. Плотность воды равна $\rho_0$, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Найти массу $\Delta m$ растаявшего льда и конечную температуру $t_к$ системы после установления равновесия. Известно, что после установления равновесия в сосуде осталась вода.

**Решение**

Полагаем ниже, что температуры $t$ представлены в градусах Цельсия, и что температура плавления льда равна 0 °С.

1 случай: лёд полностью растаял. Реализуется в случаях $t_к > 0$

$$t_k=\frac{c_в m_в t_1+c_Л m_Л t_2-\lambda_Л m_Л}{c_в(m_л+m_в)},\ \Delta m=m_л. \tag{1}$$

2 случай: лёд растаял не до конца. Реализуется в случаях, когда расчёт по формуле выше даёт $t_к \le 0$.

$$\Delta m=\frac{c_в m_в t_1+c_Л m_Л t_2}{\lambda_Л},\ t_к=0\ ^\circ C. \tag{2}$$

Комментарий:

В случае 1 закон сохранения энергии имеет вид

$$c_в m_в\cdot(t_k-t_1)+c_л m_л\cdot(0-t_2)+c_в m_л\cdot(t_k-0)+m_л\cdot\lambda_л=0.$$

Случай 2:

$$c_в m_в\cdot(0-t_1)+c_л m_л\cdot(0-t_2)+\Delta m_л\cdot\lambda_л=0.$$