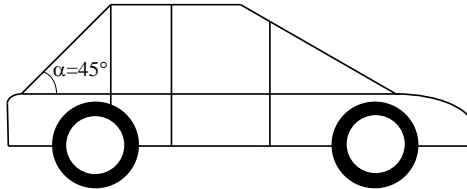


Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

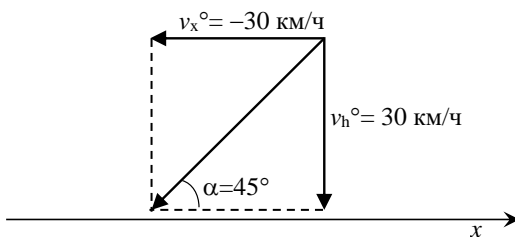
8-9 класс

Задание 1. (20 баллов) Автомобиль, схематично изображённый на рисунке, попал под дождь. Разогнавшись до скорости 30 км/час, водитель замечает, что заднее стекло постепенно высыхает, и там не появляется новых капель, хотя дождь идёт с прежней силой. Ветра нет. Какова скорость падения капель на землю?



Решение

Если ветра нет, то горизонтальная компонента скорости капль относительно автомобиля равна скорости его движения с противоположным знаком, то есть -30 км/ч. (4 балла). С учётом падения на землю, скорость капль – это вектор, показанный на рисунке (8 баллов):



Теперь, скорость падения капль на землю:

$$v_n = v_x \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = 1 \cdot (30 \text{ км/ч}) = 30 \text{ км/ч} = 8\frac{1}{3} \text{ м/с}$$

(за расчётную формулу - 4 балла)

Ответ: Скорость падения капль равна $30 \text{ км/ч} = 8\frac{1}{3} \text{ м/с}$ (за правильный ответ - 4 балла)

Задание 2. (20 баллов) Математический маятник длиной $L=5F$ совершает колебания в плоскости собирающей линзы так, что главная оптическая ось линзы принадлежит плоскости колебания. Равновесное положение колеблющегося тела располагается на главной оптической оси линзы на расстоянии $d=1.5F$. Постройте изображения положений максимума потенциальной энергии этого маятника, если известно, что амплитуда колебаний составляет F . (подсказка: при построении примите фокус равным 4 клеткам)

Решение

Заметим, что максимумы потенциальной энергии соответствуют точкам наибольшего отклонения маятника (3 балла). Определим расстояния до линзы для каждой из этих точек, зная амплитуду колебания $d_1=1.5F-F=0.5F$, $d_2=1.5F+F=2.5F$. (3 балла). С помощью известных геометрических соотношений, рассмотрев прямоугольный треугольник с катетами $5F-h$ и F , а также гипотенузой $5F$, найдем высоту положения максимума потенциальной энергии $h = F(5-\sqrt{24})$ ИЛИ получим высоту построением, с помощью циркуля и линейки. (8 баллов) Построим изображения одинакового по высоте предмета, находящегося на расстоянии $0.5F$ и $2.5F$ от линзы (6 баллов)

Примечание: если участник построил правильное изображение двух равных предметов, находящихся на указанных расстояниях от собирающей линзы, оценивать рисунок в 15 баллов.

Задание 3. (20 баллов). Однородную проволоку согнули под прямым углом и подвесили за конец короткого участка. Найти угол, который образует короткая сторона с вертикалью. Длины сторон угла: $1/4L$ и $3/4L$.

Решение



Заметим, что на вертикальной линии, проходящий через конец короткого участка, окажется центр тяжести тела. **(5 баллов)** Введем координатные оси – ось Y вдоль короткого конца, ось X – вдоль длинного. Тогда центры тяжести каждого из концов прута будут иметь координаты $A(0; L/8)$ – для короткого, $B(3L/8; 0)$ – для длинного. **(2 балла)** С помощью метода разбиений получим координаты центра тяжести тела

$$X_c = (L/4 \cdot 0 + 3L/8 \cdot 3L/4) / L = 9L/32 \text{ (4 балла)}$$

$$Y_c = (3L/4 \cdot 0 + L/8 \cdot L/4) / L = L/32 \text{ (4 балла)}$$

Заметим, что стороны, имеющие длины X_c и $L/4 - Y_c$ образуют прямоугольный треугольник с искомым углом α . Теперь остается только найти его тангенс **$\text{tg } \alpha = X_c / (L/4 - Y_c)$ (5 баллов)**

Задание 4. (20 баллов) Метеорит, имеющий радиус $R = 0.5$ см, падает на поверхность озера, покрытую чистым льдом. Его обнаруживают в толще льда, на глубине $H = 60$ см от поверхности. Какова минимально возможная теплоёмкость единицы объёма этого метеорита, если его температура при падении составляла 1000 °С, тогда как температура льда была равной -20 °С? Использовать следующие значения характеристик льда: удельная теплоёмкость 2110 Дж/(кг·К); удельная теплота плавления 333500 Дж/(кг·К).

Решение

1. Для того, чтобы быть обнаруженным на глубине $H = 60$ см в толще льда, метеорит должен был, после падения на поверхность, «проплыть» цилиндрический канал объёмом

$$V = \pi R^2 \cdot H \text{ (5 баллов).}$$

2. В этом канале, лёд должен был нагреться до 0 °С ($\Delta T = 20$ °С, **2 балла**), а затем и расплавиться. На это потребовалась энергия

$$E = \rho V \cdot (c_{\text{льда}} \cdot \Delta T + \lambda_{\text{льда}}) \text{ (3 балла),}$$

где $c_{\text{льда}}$, $\lambda_{\text{льда}}$ - массовые удельные теплоёмкость и теплота плавления.

3. Минимально возможной теплоёмкости метеорита соответствует идеальный процесс, в котором метеорит охладился до 0 °С ($\Delta T_{\text{метеорита}} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$), а вся его внутренняя энергия пошла на расплавление льда в канале. Тогда

$$E = c_v V_{\text{метеорита}} \cdot \Delta T_{\text{метеорита}} \quad (5 \text{ баллов}),$$

где c_v - искомая минимально возможная теплоёмкость единицы объёма.

Отметим, что

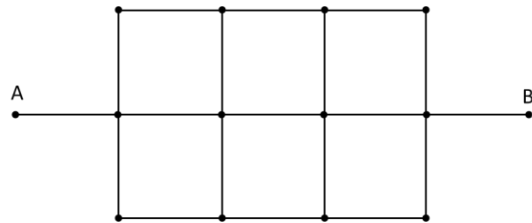
$$V_{\text{метеорита}} = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (2 \text{ балла})$$

Соответственно,

$$c_v = \frac{\rho_{\text{льда}} V_{\text{канала}} \cdot (c_{\text{льда}} \cdot \Delta T_{\text{льда}} + \lambda_{\text{льда}})}{V_{\text{метеорита}} \cdot \Delta T_{\text{метеорита}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{H}{R} \cdot \rho_{\text{льда}} \cdot \frac{(c_{\text{льда}} \cdot \Delta T_{\text{льда}} + \lambda_{\text{льда}})}{\Delta T_{\text{метеорита}}} = 3.10 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{К}} \quad (3 \text{ балла}).$$

Ответ: $c_v = 3.10 \cdot 10^7 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$

Задание 5. (20 баллов) В электрической схеме изображённой на рисунке, найти электрическое сопротивление между выводами А и В? Проводники изготовлены из алюминиевой проволоки одинаковой длины ($L=5 \text{ см}$) и диаметром ($d=2 \text{ мм}$). Удельное сопротивление проволоки $\rho_{Al} = 0,027 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$.



Пример решения

Для нахождения электрического сопротивления R_{AB} , представим исходную схему в виде эквивалентной схемы замещения. Для этого каждый отрезок проволоки заменим его электрическим сопротивлением R . Из условия известно, что все отрезки проволоки, между узлами, имеют одинаковые геометрические размеры и выполнены из однородного материала, следовательно, электрическое сопротивление всех отрезков одинаковы.

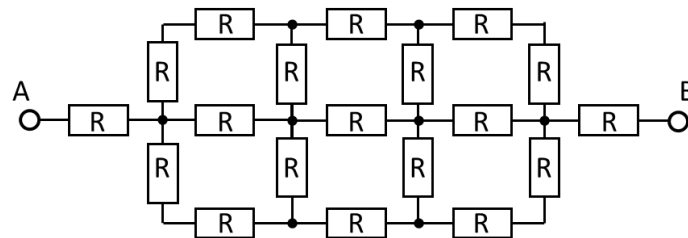


Рис. 1.

Для нахождения электрического сопротивления R_{AB} , достаточно найти электрическое сопротивление отдельного отрезка и эквивалентное сопротивление схемы (Рис.1.).

Произведём расчет электрического сопротивления отдельного отрезка. Воспользуемся формулой:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Где, R – электрическое сопротивление проводника; ρ – удельное электрическое сопротивление, l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения.

Из параметров данных в условии задачи находим площадь поперечного сечения S и электрическое сопротивление отдельного отрезка.

$$S = \frac{\pi * d^2}{4} \cong 3,14 \text{ мм}^2$$

$$R = \frac{0,027 * 0,05}{3,14} \cong 1,37 * 10^{-4} \text{ Ом}$$

Производим расчет эквивалентного сопротивления схем.

Обратив внимание на симметричность схемы относительно выводов АВ производим ее упрощение, поскольку токи в верхних и нижних ветвях одинаковые следовательно сопротивления с этих ветвях параллельны (рис.2). Введем обозначение всех узлов в схеме.

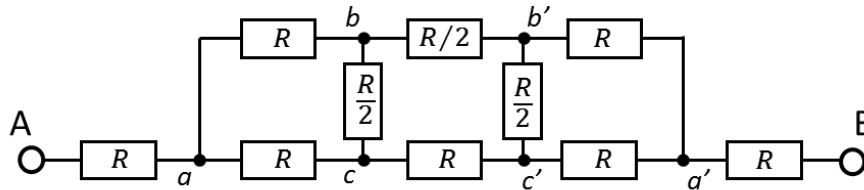


Рис. 2.

Для дальнейшего упрощения воспользуемся схемой и формулами преобразования соединения сопротивлений «треугольник» в соединении сопротивлений «звезда» рис.3.

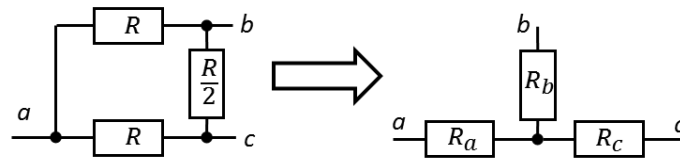


Рис.3.

Из формул преобразования вычислим сопротивления R_a, R_b, R_c .

$$R_a = \frac{R * R}{R + R + \frac{R}{2}} = \frac{2R}{5}$$

$$R_b = R_c = \frac{\frac{R * R}{2}}{R + R + \frac{R}{2}} = \frac{R}{5}$$

Заменим соединения сопротивлений «треугольником» abc и $a'b'c'$ (рис.2) на соединения «звездой» с учетом рассчитанных сопротивлений R_a, R_b, R_c рис.4.

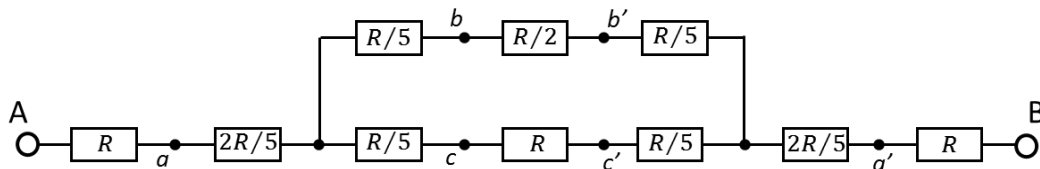


Рис.4.

Получившаяся схема представляет последовательное и параллельное соединение сопротивлений. При последовательном соединении складываем сопротивления, при параллельном соединении складываем проводимости.

В результате получаем

$$R_{AB} = 3,35R = 4,59 * 10^{-4} \text{ Ом}$$

Ответ: $R_{AB} = 4,59 * 10^{-4} \text{ Ом}$

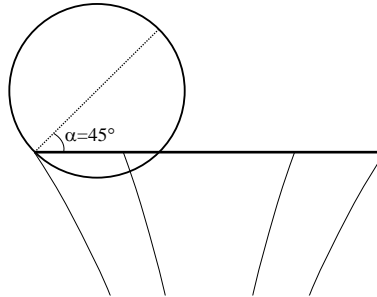
Критерии оценивания, максимальный балл за задание 20.

- приведена формула расчета электрического сопротивления однородного проводника постоянного сечения – 4 балла;
- сделано предположение о симметрии электрической цепи – 4 балла;
- составлена эквивалентная схема цепи с учетом её симметрии – 4 балла;
- приведена (использована) формула расчета последовательного соединения сопротивлений – 2 балла;

- приведена (использована) формула расчета параллельного соединения сопротивлений – 2 балла;
- приведена формула и сделано преобразование соединения сопротивлений «треугольник→звезда» – 2 балла;
- получена итоговая формула и ответ – 2 балла.

10-11 класс

Задание 1. (20 баллов) Баскетбольный мяч катится вдоль дужки кольца со скоростью v . Положение мяча относительно кольца показано на Рисунке. При каком минимальном значении v мяч не упадёт в кольцо? Радиусы мяча и кольца равны 23 см и 12 см, соответственно. Сечение дужки кольца принять кругом, размер которого пренебрежимо мал по сравнению с мячом. Вектор начальной скорости мяча считать горизонтальным, а модуль скорости – постоянной величиной.

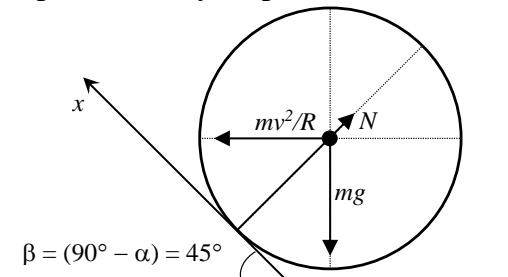


Решение

К сожалению, в формулировке задачи значения радиусов мяча и кольца ошибочно переставлены местами. Как рисунок, так и физический смысл задачи предполагают, что радиус мяча должен быть меньшим, чем радиус кольца. То есть, радиус мяча должен был быть указан равным 12 см, тогда как кольца – 23 см. При проверке задачи, считаем оба выбора радиусов мяча и кольца допустимыми. Баллы выставляем за правильность решения задачи в соответствии с выбранными радиусами.

Решение для случая $R_{\text{мяча}} = 12 \text{ см}, R_{\text{кольца}} = 23 \text{ см}$

В точке соприкосновения мяча с дужкой кольца к мячу приложена сила реакции опоры, направленная к его центру. Эта и другие силы, приложенные к мячу, показаны на Рисунке (4 балла за построение силы тяжести, 6 баллов – за построение центробежной силы либо за правильное рассмотрение центробежного ускорения).



Минимальная скорость, при которой мяч не падает в кольцо – это скорость, обеспечивающая отсутствие его смещения вдоль оси x , перпендикулярной силе реакции опоры. Определить эту скорость можно, например, следующими двумя путями:

Способ 1: сумма проекций гравитационной и центробежной сил должна быть равна нулю (4 балла):

$$m \cdot \frac{v^2}{R} \sin(\alpha) - mg \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Способ 2: сумма моментов гравитационной и центробежной сил относительно точки соприкосновения мяча с поверхностью дужки кольца должна быть равна нулю, вследствие чего мяч не будет катиться вдоль оси x (4 балла). Результат получается фактически тем же, что и при первом способе:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} \sin(\alpha) \cdot R_{\text{мяча}} - mg \cdot \cos(\alpha) \cdot R_{\text{мяча}} = 0,$$

откуда

$$v_{\min} = \sqrt{gR \cdot \operatorname{ctg}(\alpha)}.$$

Важно учитывать то, что как гравитационная, так и центробежная силы приложены к центру мяча, так что R при расчёте центробежной силы и под корнем в последней формуле – это расстояние до центра мяча от оси кольца:

$$R = R_{\text{кольца}} - R_{\text{мяча}} \cdot \cos(\alpha) \quad (2 \text{ балла}).$$

Получается $R = 14.5$ см (2 балла).

При подстановке в расчётную формулу, радиус нужно выразить в метрах: $R = 0.145$ м.

Таким образом, ответ: $v = \sqrt{gR \cdot \operatorname{ctg}(\alpha)} = 1.19$ м/с (2 балла).

Решение для случая $R_{\text{мяча}} = 23$ см, $R_{\text{кольца}} = 12$ см

Если радиус мяча выбран большим, чем радиус кольца, то необходимо выяснить, сможет ли мяч катиться по кольцу при заданном значении угла α . Это было бы возможным, если бы радиус сечения мяча горизонтальной плоскостью, расположенной на уровне кольца (R), был бы меньшим, чем радиус кольца (8 баллов). Иначе расположить мяч под углом α просто не получится.

Значение искомого радиуса:

$$R = R_{\text{мяча}} \cdot \cos(\alpha) \quad (4 \text{ балла}).$$

В настоящей задаче $R = 16.3$ см, что превышает радиус кольца (4 балла). Соответственно, реализовать условия задачи на практике невозможно (4 балла).

Ответ: расположить мяч под углом $\alpha = 45^\circ$ относительно плоскости кольца невозможно.

Примечание: «большой» мяч мог бы прокатиться по дужке «маленького» кольца, если бы выполнялось условие

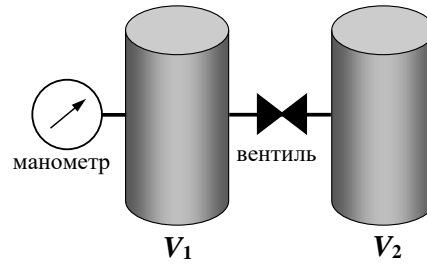
$$R_{\text{кольца}} > R_{\text{мяча}} \cdot \cos(\alpha).$$

Тогда, мяч вылетел бы из кольца при скорости

$$v > \sqrt{g \cdot (R_{\text{кольца}} - R_{\text{мяча}} \cdot \cos(\alpha)) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha)},$$

либо остался бы в кольце при меньших скоростях. В последнем случае, мяч можно было бы считать «упавшим в кольцо», в отличие от вылетевшего из кольца.

Задание 2. (20 баллов) В объёме V_1 , имеющем температуру T_1 , находится идеальный газ. При закрытом вентиле манометр показывал в этом объёме давление P_0 (см. Рисунок). После измерения давления, объём V_1 соединяют с пустым объёмом V_2 , температура которого T_2 в этот момент совпадает с температурой первого объёма T_1 . В результате соединения объёмов, давление в объёме V_1 , измеряемое манометром, понижается до значения $P_2 = 0.6 \cdot P_0$. После соединения с объёмом V_1 , температуру T_2 объёма V_2 медленно изменяют. Одновременно, изменяются и показания манометра. Температура первого объёма T_1 остаётся неизменной. При температуре $T_2 = -23$ °С манометр показывает давление P , равное $0.564 \cdot P_0$. Найти температуру T_1 .



Решение

1. При изотермическом соединении объёмов выполняется равенство

$$P_0 \cdot V_1 = P_2 \cdot (V_1 + V_2) \quad (2 \text{ балла}),$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_0}{P_2} - 1 = \frac{2}{3} \quad (2 \text{ балла, за общую формулу либо числовое значение}).$$

2. После изменения температуры объёма V_2 , количества молей газа в объёмах V_1 и V_2 (ν_1 и ν_2 , соответственно) связаны соотношением

$$\frac{\nu_1 RT_1}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_2}{V_2} = P \quad (2 \text{ балла}).$$

3. Суммарное количество молей газа (ν) в процессе изменения T_2 остаётся постоянным, равным количеству молей до изменения температуры. Следовательно,

$$\nu = \frac{P_0 \cdot V_1}{RT_1}, \text{ либо } \nu = \frac{P_2 \cdot (V_1 + V_2)}{RT_1} \quad (2 \text{ балла}).$$

При этом,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \quad (1 \text{ балл}).$$

Далее, возможны различные способы рассуждения, ведущие к ответу:

Способ 1

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{P_0 \cdot V_1}{RT_1} - \nu_1 \quad (1 \text{ балл}).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\nu_2 RT_2}{V_2} = \left(\frac{P_0 V_1}{RT_1} - \nu_1 \right) \cdot \frac{RT_2}{V_2} = P \quad (2 \text{ балла}).$$

4. Как отмечено выше,

$$\nu_1 = \frac{P V_1}{RT_1},$$

откуда

$$\left(\frac{P_0 V_1}{RT_1} - \frac{P V_1}{RT_1} \right) \cdot \frac{RT_2}{V_2} = (P_0 - P) \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = P \quad (4 \text{ балла}).$$

Теперь,

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{P_0}{P} - 1 \right) \cdot \left(\frac{P_0}{P_2} - 1 \right)^{-1} \quad (2 \text{ балла}).$$

Подстановка значений даёт ответ

$$T_1 = (250.15 \text{ К}) \cdot \left(\frac{1}{0.564} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{0.6} - 1 \right)^{-1} = (250.15 \text{ К}) \cdot \frac{0.773}{0.667} = 290 \text{ К} \quad (2 \text{ балла}).$$

Ответ: $T_1 = 290 \text{ К}$.

Способ 2

Из формул, приведённых выше, следует, что

$$\frac{P_0 V_1}{T_1} \sim \nu.$$

После изменения температуры объёма V_2 , при новом давлении P , верны следующие соотношения:

$$\frac{P V_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0 V_1}{T_1} \sim \nu_1; \quad \frac{P V_2}{T_2} = \frac{0.564 \cdot P_0 V_2}{T_2} \sim \nu_2. \quad (3 \text{ балла}).$$

Теперь,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \frac{P V_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0 V_1}{T_1} + \frac{0.564 \cdot P_0 V_2}{T_2} \quad (2 \text{ балла}).$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \frac{P_0 V_1}{T_1} \cdot (1 - 0.564) &= \frac{0.436 \cdot P_0 V_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0 V_2}{T_2} \Rightarrow \\ T_1 &= T_2 \cdot \frac{0.436}{0.564} \cdot \frac{V_1}{V_2} = (250.15 \text{ К}) \cdot 0.773 \cdot \frac{3}{2} = 290 \text{ К}. \end{aligned} \quad (4 \text{ балла}).$$

С учётом возможности ошибок при подстановке значений, за получение правильного ответа – дополнительные **2 балла**.

Ответ: $T_1 = 290 \text{ К}$.

Задание 2. Альтернативный вариант решения

1. При изотермическом соединении объёмов выполняется равенство

$$P_0 \cdot V_1 = P_2 \cdot (V_1 + V_2) \quad (2 \text{ балла}),$$

из которого следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_0}{P_2} - 1 \quad (2 \text{ балла}).$$

Сразу отметим, что при подстановке $P_2 = 0.6 \cdot P_0$ получается

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{0.6} - 1 = \frac{2}{3} \approx 0.67.$$

Пусть ν - суммарное количество молей газа в системе из двух объёмов. Сразу после их соединения, до изменения температуры T_2 :

$$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_1}{V_2} = P_2 \quad (2 \text{ балла}).$$

Отсюда следует, что

$$\nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3} \nu_1 \quad (1 \text{ балл}).$$

Действует соотношение

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu \quad (1 \text{ балл}),$$

ведущее к результату

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{3}{5} \nu = 0.6 \cdot \nu, \\ \nu_2 = \frac{2}{5} \nu = 0.4 \cdot \nu. \end{cases} \quad (2 \text{ балла}).$$

После изменения температуры 2-го объёма, молекулы газа перераспределяются, при сохранении суммарного количества молей (**2 балла**). Если обозначить изменение количества частиц во 2-м объёме через $\Delta \nu$, то новому давлению P соответствуют равенства

$$\begin{cases} P \cdot V_2 = (v_2 + \Delta v) \cdot RT_2, \\ P \cdot V_1 = (v_1 - \Delta v) \cdot RT_1. \end{cases} \quad (2 \text{ балла}).$$

В объёме V_1 температура остаётся неизменной, что позволяет найти Δv :

$$P_2 V_1 = 0.6 \cdot P_0 V_1 = v_1 R T_1 \Rightarrow R T_1 = \frac{0.6 \cdot P_0 V_1}{v_1} = \frac{P \cdot V_1}{(v_1 - \Delta v)} = \frac{0.564 \cdot P_0 V_1}{(v_1 - \Delta v)} \Rightarrow \quad (2 \text{ балла}).$$

$$0.6 \cdot (v_1 - \Delta v) = 0.564 \cdot v_1 \Rightarrow \Delta v = \frac{0.6 - 0.564}{0.6} v_1 = 0.06 \cdot v_1 = 0.06 \cdot 0.6 \cdot v = 0.036 \cdot v.$$

Далее,

$$\frac{P_2 \cdot V_2}{v_2} = R T_1 \Rightarrow \frac{P_2 \cdot V_2}{v_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = R T_2 \quad (4 \text{ балла}).$$

Теперь,

$$R T_2 = \frac{P_2 V_2}{v_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{P \cdot V_2}{v_2 + \Delta v} \Rightarrow \frac{0.6 P_0}{0.4 \cdot v} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{0.564 P_0}{(0.4 + 0.036) \cdot v} \Rightarrow \quad (2 \text{ балла}).$$

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{0.436}{0.564} = (250.15 \text{ K}) \cdot 1.16 = 290 \text{ K}.$$

С учётом возможности ошибок при подстановке значений, за получение правильного ответа – дополнительные **2 балла**.

Ответ: $T_1 = 290 \text{ K}$.

Примечание к распределению баллов при оценивании Задания 2. Можно предположить существование способов решения, заметно отличающихся от рассмотренных выше, либо являющихся их комбинациями. В таких случаях, предлагаю распределять баллы следующим образом:

- 4 балла за правильное получение отношения V_2 / V_1 , в общем виде либо числом;
- 2 балла за использование уравнения Менделеева-Клайперона;
- 6 баллов за использование, прямое или косвенное, соотношения $v = v_1 + v_2 = \text{const}$, если рассмотрено изменение v_1 и v_2 в зависимости от температуры T_2 ;
- 6 баллов за получение, в любой форме, правильного выражения температуры T_1 через температуру T_2 ;
- 2 балла за правильный количественный ответ, с допустимой погрешностью ± 1 в третьей значащей цифре.

Задание 3. (20 баллов) В тёплый летний день выпал крупный град. Известно, что сферические градины диаметром 2 см растаяли при постоянной температуре воздуха в течение 1 часа. Как долго продлится таяние, если собрать такие градины в шар диаметром 20 см? Считать, в качестве упрощающего приближения, что шар получился однородным, его плотность и теплофизические параметры совпадали с плотностью и параметрами маленьких градин.

Решение

Для решения задачи нужно установить либо догадаться, что время таяния ледяного шара пропорционально отношению его объёма (V) к площади (S), то есть диаметру, либо радиусу (**15 баллов** за формулирование этого утверждения, независимо от строгости доказательства). Это так, поскольку количество тепла, получаемое шаром в единицу времени из окружающей среды, пропорционально площади поверхности, тогда как суммарное количество тепла, необходимое для плавления льда, пропорционально его объёму. Возможны следующие количественные рассуждения, дающие указанный результат:

1. Если ледяной шар заданного радиуса R имеет начальную температуру, меньшую $0\text{ }^\circ\text{C}$, то он должен нагреться до $0\text{ }^\circ\text{C}$, прежде чем начнётся плавление. За время Δt шар получит через поверхность количество тепла ΔQ , которое даётся соотношением

$$\Delta Q = \alpha \cdot S \cdot (T_0 - T) \cdot \Delta t,$$

где α - коэффициент теплоотдачи, S - площадь шара, T - его температура, T_0 - температура окружающей среды. Одновременно,

$$\Delta Q = C_v \cdot V \cdot \Delta T,$$

где C_v - теплоёмкость единицы объёма шара, V - объём, ΔT - изменение температуры. Учитывая, что

$$S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

получаем скорость нагрева шара

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{C_v} \cdot \frac{S}{V} \cdot (T_0 - T) = \frac{3\alpha}{C_v R} \cdot (T_0 - T),$$

обратно пропорциональную его радиусу. Соответственно, время нагревания шара до любой заданной температуры будет пропорциональным радиусу R .

2. Если шар уже имеет температуру $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$, то его радиус будет постепенно уменьшаться по мере плавления. Для уменьшения радиуса на величину ΔR потребуется количество теплоты ΔQ :

$$\Delta Q = -\lambda_v \Delta V = -\lambda_v S \Delta R,$$

где λ_v - теплота плавления единицы объёма, а знак «-» учитывает тот факт, что при получении шаром тепла его радиус и объём уменьшаются. Если теперь Δt - время уменьшения радиуса на величину ΔR , то, аналогично пункту 1,

$$\frac{\lambda_v S \Delta R}{\Delta t} = -\alpha \cdot S \cdot (T_0 - 0\text{ }^\circ\text{C}) \Rightarrow \Delta R = -\frac{\alpha}{\lambda_v} \cdot (T_0 - 0\text{ }^\circ\text{C}) \cdot \Delta t.$$

Уменьшение радиуса пропорционально прошедшему времени, так что и время полного таяния шара будет пропорциональным его радиусу.

3. Если время плавления ледяного шара пропорционально диаметру, то время плавления шара диаметром 20 см будет в 10 раз большим, чем для шара диаметром 2 см (**3 балла**, при условии, что данный результат обоснован рассмотрением отношения объёма шара к площади, либо эквивалентным по строгости способом), то есть составит 10 часов (**2 балла**).

Ответ: 10 часов.

Примечание: Поток тепла через поверхность шара мог быть рассмотрен участниками олимпиады без получения того результата, что этот поток пропорционален площади поверхности (именно площади, а не радиусу либо объёму шара). Если при этом найдены и обоснованы соотношения малых приращений температуры, радиуса и времени, рассмотренные выше в пунктах 1 и 2 – **15 баллов** (+ 5 баллов за правильный окончательный результат).

Задание 4. (20 баллов) Космический путешественник спустился на поверхность сферического астероида. Он полагает, что прямо под ним, практически у самой поверхности, находится большая сферическая полость. Период колебаний маятника, принесенного путешественником, увеличился в 1.002 раза по сравнению с обратной стороной астероида, где влиянием полости можно было пренебречь. Каким должен быть радиус полости, если радиус астероида равен 250 км? Плотность астероида считать постоянной.

Решение

1. Период маятника вдали от полости (на обратной стороне астероида):

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \quad (4 \text{ балла})$$

2. Ускорение свободного падения вдали от полости:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} = G \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \rho G \cdot R, \text{ где } M \text{ – масса астероида, } \rho \text{ - его плотность, } R \text{ – радиус (4 балла; для получения этих баллов, достаточно любым способом обосновать соотношение } g_0 \sim R).$$

3. Полость радиуса r можно представить как сферу отрицательной массы, наложенную поверх большого астероида. Тогда, её вклад в ускорение свободного падения окажется равным

$$g_- = -G \frac{m}{r^2} = -G \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi \rho G \cdot r = -g_0 \frac{r}{R} \quad (8 \text{ баллов})$$

4. Теперь, отношение периодов маятника над полостью (T) и вдали от неё (T_0) запишется как

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_0 - |g_-|}{g_0}} = \sqrt{\frac{g_0(1 - r/R)}{g_0}} = \sqrt{\frac{R-r}{R}} \quad (2 \text{ балла}),$$

откуда

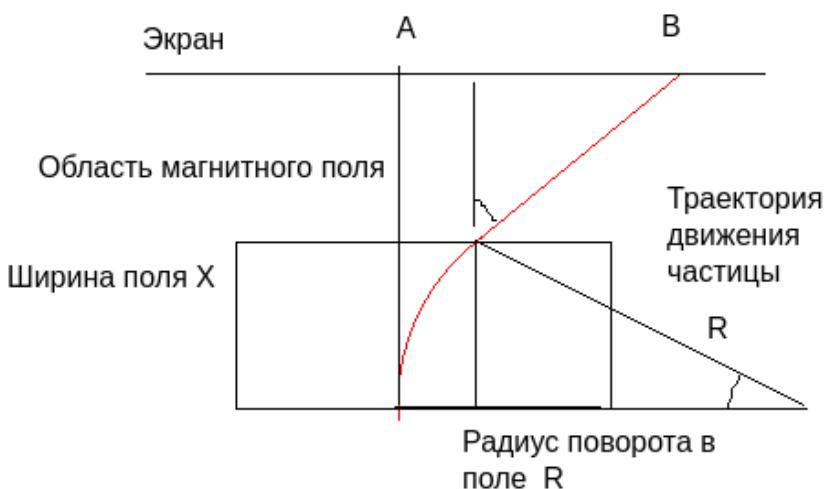
$$r = R \cdot \left(1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right) = 1.00 \text{ км (2 балла)}$$

Ответ: $r = 1.00$ км

Задание 5. (20 баллов) На пути узкого пучка моноэнергетических ионов углерода-12 с энергией $E=120$ эВ, имеющих заряд $q=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, расположена область однородного магнитного поля, имеющая размеры $x=80$ мм в первом эксперименте и 120 мм во втором. На расстоянии $l = 1$ м от края магнитного поля с индукцией $B=15$ мТл установлена мишень, на которую выводится пучок. Найдите отношение смещения центра пучка ионов в первом эксперименте к смещению во втором.

Заметим, что отклонение пучка будет происходить, если ионы будут влетать в область однородного магнитного поля в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля.

Примерный чертеж:



AB — искомое смещение частицы от траектории прямолинейного движения. Отметим, что смещение будет состоять из двух компонент: смещения на выходе из магнитного поля d (где

частица двигалась по дуге окружности) и смещения в области без поля \mathbf{H} , где частица двигалась равномерно и прямолинейно.

Определим зависимость радиуса поворота в магнитном поле от данных в условии величин:

$$mv = \sqrt{2mE} \quad R = \frac{mv}{qB} \quad R = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$$

Смещение в поле \mathbf{d} можно найти, рассмотрев прямоугольный треугольник с гипотенузой \mathbf{R} и катетами \mathbf{x} , $\mathbf{R-d}$, откуда \mathbf{d} находится по теореме Пифагора.

$$R^2 = x^2 + (R - d)^2 \quad d = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{или} \quad d = R \cos \left(\arcsin \left(\frac{x}{R} \right) \right)$$

Для поиска смещения \mathbf{H} самым простым способом необходимо определить угол α . Заметим, что угол поворота в поле и угол, который образует вектор скорости при выходе из поля, одинаковы. Отсюда смещение в области без поля \mathbf{H} может быть найдено следующим образом:

$$\alpha = \arcsin(x/R) \rightarrow \tan(\alpha) = H/L \rightarrow H = L * \tan(\alpha)$$

Итоговое отклонение пучка может быть определено как сумма двух смещений: $S = d + H$

Выполнив расчет для двух случаев, получим итоговое отношение, равное

$$\frac{S_1}{S_2} = 0,63$$

Замечание: при подстановке численных значений выяснится, что углы невелики и в данном случае работает приближение малых углов. Однако использование такого приближения без обоснования расчетов недопустимо, поскольку оно не следует из условия задачи.

Критерии оценивания, максимальный балл за задание 20:

- 1) Правильный чертеж — 5 баллов
- 2) Указано, что углы поворота в магнитном поле и отклонения пучка на выходе совпадают — 2 балла
- 3) Приведена классическая формула радиуса поворота в магнитном поле $R = \frac{mv}{qB}$ — 3 балла
- 4) В формуле радиуса поворота в магнитном поле сделана замена, $R = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$ — 2 балла
- 5) Приведена формула для расчета смещения в области без магнитного поля — 3 балла
- 6) Выведена итоговая формула - 5 баллов, даже если в расчетах допущена ошибка. ИЛИ приведена итоговая формула и дан правильный ответ — 5 баллов.