Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

8 класс

1. Две улитки решили наперегонки добраться до вершины 2-метрового столба (у каждой свой столб). Первая улитка поднимается в ясный день на 40 сантиметров, а в пасмурный день – на 25 сантиметров. Вторая улитка поднимается в ясный день на 30 сантиметров, а в пасмурный день – на 35 сантиметров. Каждую ночь улитки спускаются на 30 сантиметров независимо от погоды. В результате они добрались до вершин своих столбов одновременно. Сколько дней длилось соревнование улиток? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет. (20 баллов)

Решение: Пусть во время соревнования улиток ясных дней было x, а пасмурных – y. Поскольку они могли достичь вершин только при подъёме, ночей во время соревнования было на одну меньше. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 40x + 25y - 30(x + y - 1) = 200 \\ 30x + 35y - 30(x + y - 1) = 200 \end{cases}.$$

Упростим систему и получим

$$\begin{cases} 10x - 5y = 170 \\ 5y = 170 \end{cases},$$

откуда $x = 34, y = 34$. Значит соревнование улиток длилось 68 дней.

Ответ: 68

2. Существует ли натуральное число $n > 3$ такое, что десятичная запись числа n^2 состоит только из нечётных цифр? (20 баллов)

Решение: Предположим, что такое натуральное $n > 3$ существует. Тогда число n^2 состоит хотя бы из двух цифр. Возьмём число, образованное последними двумя цифрами числа n^2, и назовём его m. По предположению, обе цифры этого числа нечётные. Значит остаток от деления этого числа на 4 равен трём. Тогда остаток от деления числа n^2 на 4 также равен трём, так как $n^2 - m = \overline{...00} \vdots 4$. Но квадрат числа может давать только остатки 0 и 1 при делении на 4 – противоречие. Следовательно, такого числа n не существует.

Ответ: не существует

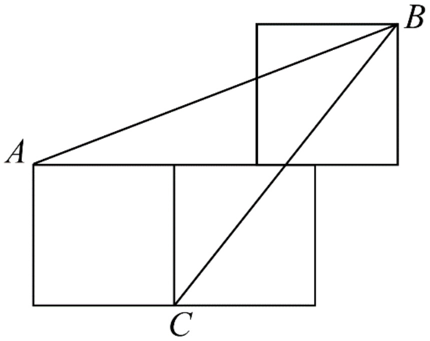
3. Назовём натуральное число *почти палиндромом*, если в нём можно изменить одну цифру так, чтобы оно стало палиндромом. Сколько существует девятизначных почти палиндромов? (20 баллов)

Решение: После замены одной цифры в почти палиндроме мы получим число вида $\overline{abcdedcba}$. Разобьём цифры на пары по разрядам: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. В любом почти палиндроме в трёх указанных парах разрядов цифры должны совпадать, и ровно в одной паре быть разными.

Превратить это число в палиндром можно путём замены одной из двух цифр в оставшейся паре на другую цифру в этой паре. Выбрать три пары разрядов можно 4 способами (3 из них содержат пару 1 и 9, и ровно один способ эту пару не содержит), в каждой паре (за исключением 1 и 9) цифры могут быть любыми и одинаковыми, в паре 1 и 9 (если она выбрана) цифры одинаковые и не равны нулю, в оставшейся паре цифры различные (любые, если это не пара 1 и 9, и любые, кроме нуля на первом месте, если осталась пара 1 и 9), а средняя цифра произвольная. Всего таких чисел

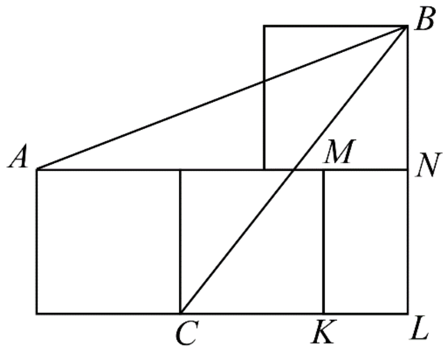
$$3 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9 + 10^4 \cdot 9 \cdot 9 = 3240000.$$

Ответ: 3240000



4. На рисунке изображено три равных квадрата. Докажите, что $AB > BC$. (20 баллов)

Решение: Отметим точки M, N, K так, как показано на рисунке. Продлим прямые BN и CK до пересечения в точке L. $MNLK$ – прямоугольник, значит $MN = KL, NL = MK$. Пусть сторона каждого квадрата равна x и $MN = y$. Тогда $AN = 2x + y, BL = 2x, CL = x + y$. Из теоремы Пифагора получим $AB^2 = AN^2 + NB^2 = (2x + y)^2 + x^2 = 5x^2 + 4xy + y^2$ и $BC^2 = CL^2 + BL^2 = (x + y)^2 + (2x)^2 = 5x^2 + 2xy + y^2$, откуда $AB^2 - BC^2 = 2xy > 0$, а значит $AB > BC$, что и требовалось доказать.



5. Серёжа записал в строку в некотором порядке все цифры от 0 до 9 по два раза. Затем он посчитал сумму в каждой четвёрке подряд идущих чисел. Верно ли, что среди этих сумм всегда найдётся сумма, являющаяся составным числом? (20 баллов)

Решение: Нет, например, в последовательности $7, 5, 4, 3, 7, 5, 8, 9, 1, 1, 0, 0, 2, 9, 6, 6, 2, 3, 8, 4$ суммы любых четырёх подряд идущих цифр являются простыми.

Ответ: неверно

9 класс

1. В магазине игрушек продаются 125 плюшевых мишек k разных цветов и шести разных размеров. При каком наибольшем k можно утверждать, что среди мишек найдутся хотя бы три одинаковых? (то есть совпадающих по цвету и по размеру) (20 баллов)

   Решение: Если $k = 10$, то всего в магазине 60 разновидностей мишек. Тогда если мишек каждого вида не более двух, то всего в магазине продаются не более 120 мишек – противоречие. Следовательно, среди мишек найдутся хотя бы три одинаковых.

   Если $k = 11$, то трёх одинаковых мишек может не найтись. Действительно, разновидностей мишек будет хотя бы 66, среди которых могут продаваться 59 видов по 2 экземпляра и ещё 7 видов – по одному экземпляру. При $k \geq 11$ разновидностей мишек будет больше, а значит в качестве контрпримера можно убирать вторые экземпляры мишек уже имеющихся видов и добавлять по одному новому экземпляру каждого добавленного вида.

   Ответ: 10

2. Найдите все решения ребуса $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{У} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{У} \cdot \text{Д} = 2022$ и докажите, что других нет. (В ребусе одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные) (20 баллов)

   Решение: Перепишем равенство в виде $\text{У} \cdot (\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д}) = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Так как У – цифра, являющаяся делителем числа 2022, то $\text{У} = 1, \text{У} = 2, \text{У} = 3$ или $\text{У} = 6$. Так как $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д} < 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 = 576 < 2 \cdot 337$, то $\text{У} > 3$, а значит $\text{У} = 6$. В таком случае $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д} = 337$. Заметим, что $\text{Р} \cdot \text{Д} \leq 72$, значит $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \geq 265$. Предположим, что среди цифр $\text{И}, \text{З}, \text{М}$ нет девятки. Тогда среди этих цифр обязательно есть восьмёрка и семёрка, иначе $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \leq 8 \cdot 6 \cdot 5 = 240 < 265$. Если оставшаяся цифра не больше 4, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \leq 8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$. Если оставшаяся цифра равна 5, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ и $\text{Р} \cdot \text{Д} = 57$, что невозможно. Если оставшаяся цифра равна 6, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ и $\text{Р} \cdot \text{Д} = 1$, что невозможно.

   Предположим теперь, что среди цифр $\text{И}, \text{З}, \text{М}$ есть девятка. Тогда $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \vdots 9$, а $337 \equiv_9 4$, значит $\text{Р} \cdot \text{Д} \equiv_9 4$. Парами цифр, дающими в произведении число с остатком 4 при делении на 9, могут быть только $\{1,4\}, \{2,2\}, \{5,8\}, \{7,7\}$. Две пары сразу отметаются, так как $\text{Р} \neq \text{Д}$. Если $\text{Р} \cdot \text{Д} = 4$, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 333 = 9 \cdot 37$, что невозможно. Если $\text{Р} \cdot \text{Д} = 40$, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 297 = 9 \cdot 3 \cdot 11$, что также невозможно.

   Следовательно, ребус не имеет решений.

   Ответ: решений нет

3. Графики функций $y = x^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ пересекаются в точках A и B, лежащих по разные стороны от оси ординат. Точка O – начало координат. Оказалось, что $\angle AOB = 90°$. Найдите все возможные значения c. (20 баллов)

Решение: Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – координаты точек A и B соответственно, причём $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Тогда x_1, x_2 являются корнями уравнения $(a-1)x^2 + bx + c = 0$. Если $a = 1$, то графики касаются в точке O, и двух точек пересечения быть не может. Иначе справедлива теорема Виета

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a-1}.$$

По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + BO^2$, что в координатной форме примет вид

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

что после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$x_1 x_2 = -y_1 y_2.$$

Точки A и B лежат на графике функции $y = x^2$, поэтому $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$ и последнее равенство перепишется в виде

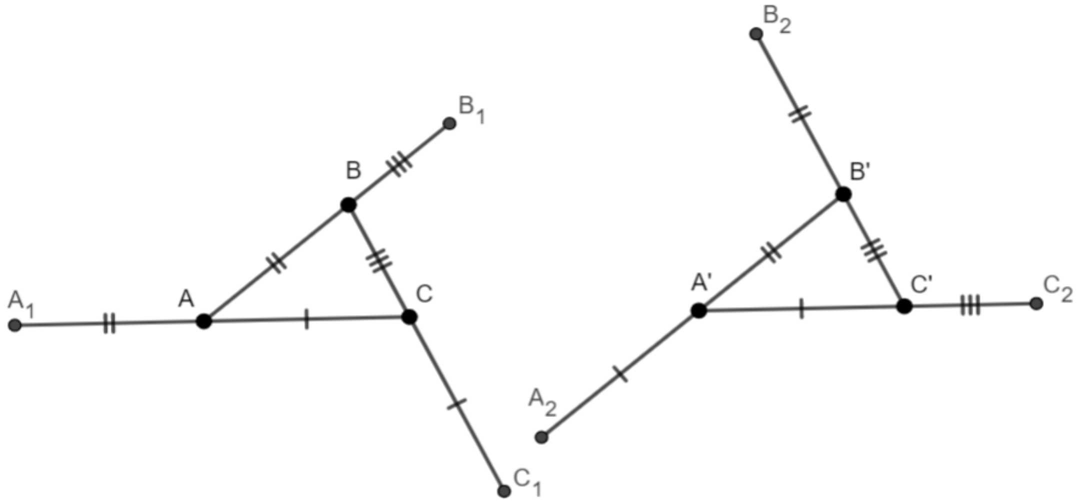
$$x_1 x_2 = -x_1^2 x_2^2,$$

откуда $x_1 x_2 = -1$. Подставляя в теорему Виета, получим, что $c = 1 - a$. Так как a может принимать любые значения, кроме 1, то c принимает любые значения, кроме нуля.

При любом указанном c, корни уравнения $(a-1)x^2 + bx + c = 0$ существуют, так как дискриминант квадратного уравнения равен $b^2 - 4(a-1)c = b^2 + 4c^2 > 0$. Равенство $x_1 x_2 = -1$ гарантирует, что эти корни будут разных знаков.

Ответ: $c \neq 0$

4. На плоскости изображены два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. На продолжениях сторон треугольника ABC взяли точки A_1, B_1, C_1, а на продолжениях сторон треугольника $A'B'C'$ – точки A_2, B_2, C_2, а затем отметили штрихами все одинаковые отрезки (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны. (20 баллов)



Решение: Докажем, что площади треугольников A_1CC_1 и $A_2B'B_2$ равны. По теореме синусов имеем

$$\frac{AB}{\sin\angle A_1CC_1} = \frac{AB}{\sin\angle BCA} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{A'C'}{\sin\angle A'B'C'} = \frac{A'C'}{\sin\angle A_2B'B_2},$$

откуда $AB \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = A'C' \cdot \sin\angle A_1CC_1$, что равносильно $B_2B' \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = CC_1 \cdot \sin\angle A_1CC_1$.

Тогда $S_{A_1CC_1} = \frac{1}{2}CA_1 \cdot CC_1 \cdot \sin\angle A_1CC_1 = \frac{1}{2}A_2B' \cdot B_2B' \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = S_{A_2B'B_2}$.

Аналогично доказывается, что $S_{B_1AA_1} = S_{B_2C'C_2}$ и $S_{C_1BB_1} = S_{C_2A'A_2}$.

В итоге имеем

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1CC_1} + S_{B_1AA_1} + S_{C_1BB_1} + S_{ABC} = S_{A_2B'B_2} + S_{B_2C'C_2} + S_{C_2A'A_2} + S_{A'B'C'} = S_{A_2B_2C_2},$$

что и требовалось доказать.

5. В языке племени «Текимар» всего 7 букв: А, Е, И, К, М, Р, Т, однако не известно, каков их порядок в алфавите. *Словом* называется любая последовательность из семи различных букв алфавита, других слов в языке не существует. Глава племени выписал все существующие слова в алфавитном порядке и заметил, что слово «Метрика» в этом списке имеет номер 3634. Какой номер в этом списке имеет слово «Материк»? (20 баллов)

Решение: Всего слов в языке племени $7! = 5040$. Заметим, что количество слов, начинающихся с какой-то буквы, одинаковое для любой первой буквы, то есть оно равно $7! \div 7 = 6! = 720$. Если слово начинается с первой в алфавитном порядке буквы, то нумерация любого такого слова начинается с номера 1 и заканчивается номером $6!$, если со второй буквы в алфавите, то нумерация начинается с номера $6! + 1$ и заканчивается номером $2 \cdot 6!$, и так далее. В общем случае, если слово начинается с k-ой буквы в алфавите, то его нумерация варьируется от номера $(k-1) \cdot 6! + 1$ до номера $k \cdot 6!$. Число 3634 удовлетворяет неравенству $5 \cdot 6! < 3634 \leq 6 \cdot 6!$, поэтому М является шестой буквой в алфавите. Теперь повторим аналогичный процесс для оставшихся шести букв. А именно, забудем про существование первой буквы, убрав её из слова. Тогда номер слова уменьшится на $5 \cdot 6! = 3600$. И если бы мы теперь составили все шестибуквенные слова и расставили бы их в алфавитном порядке, то слово «Етрика» имело бы номер 34. Количество слов, начинающихся с какой-то буквы, одинаковое для любой первой буквы, то есть оно равно $6! \div 6 = 5! = 120$. Если первая буква слова среди оставшихся шести букв является первой в алфавитном порядке, то нумерация любого такого слова начинается с номера 1 и заканчивается номером $5!$, если она является второй буквой в алфавитном порядке среди оставшихся, то нумерация начинается с номера $5! + 1$ и заканчивается номером $2 \cdot 5!$, и так далее. В общем случае, если первая буква слова является k-ой буквой в алфавитном порядке среди оставшихся, то его нумерация варьируется от номера $(k-1) \cdot 5!$ до номера $k \cdot 5!$. Число 34 удовлетворяет неравенству вышеуказанного представления следует, что $34 \leq 5!$, поэтому Е является первой в алфавитном порядке буквой среди оставшихся, а значит первой буквой алфавита. Продолжая аналогичный процесс, получим порядок следования букв: Е – первая, А – вторая, Т – третья, Р – четвёртая, И – пятая, М – шестая, К – седьмая.

В слове «Материк» буквы стоят в следующем порядке: $6, 2, 3, 1, 4, 5, 7$, значит его номер равен $5 \cdot 6! + 1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + 0 \cdot 0! + 1 = 3745$. (Множитель перед $k!$ указывает на количество цифр, стоящих правее и меньших цифры на $(k+1)$-ой позиции, если считать с конца слова. В конце добавляется единица, так как с неё начинается нумерация слов)

Ответ: 3745

10 класс

1. Существует ли трёхзначное число такое, что в его записи все цифры различны и расположены в порядке возрастания, в записи его квадрата все цифры различны и расположены в порядке возрастания, и в записи его куба все цифры различны и расположены в порядке возрастания? (20 баллов)

   Решение: Предположим, что такое число существует. Тогда в десятичной записи его квадрата не меньше пяти цифр, а в записи его куба не меньше семи цифр. Это означает, что последняя цифра его квадрата не меньше 5, а последняя цифра его куба не меньше 7. Последней цифрой квадрата не может быть равна 5, так как тогда куб числа тоже оканчивается на 5, а также не может быть равна 7 и 8, так как таких квадратов не существует. Если последняя цифра квадрата равна 6, то трёхзначное оканчивается либо на 4 (тогда его куб оканчивается на 4), либо на 6 (тогда его куб оканчивается на 6) – оба варианта не подходят. Если последняя цифра квадрата равна 9, то трёхзначное оканчивается либо на 7 (тогда его куб оканчивается на 3, чего быть не может), либо на 3. Второе возможно только если трёхзначное число равно 123. Но $123^2 = 15129$, что не подходит под условие. Следовательно, такого числа не существует.

   Ответ: не существует

2. Назовём натуральное число *почти палиндромом*, если в нём можно изменить одну цифру так, чтобы оно стало палиндромом. Сколько существует девятизначных почти палиндромов? (20 баллов)

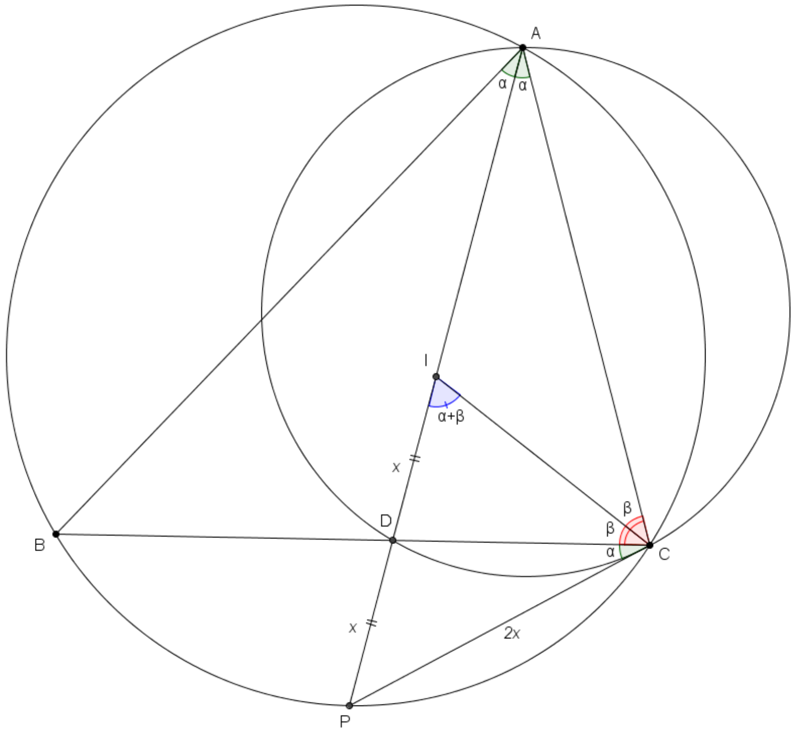
   Решение: После замены одной цифры в почти палиндроме мы получим число вида $\overline{abcdedcba}$. Разобьём цифры на пары по разрядам: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. В любом почти палиндроме в трёх указанных парах разрядов цифры должны совпадать, и ровно в одной паре быть разными. Превратить это число в палиндром можно путём замены одной из двух цифр в оставшейся паре на другую цифру в этой паре. Выбрать три пары разрядов можно 4 способами (3 из них содержат пару 1 и 9, и ровно один способ эту пару не содержит), в каждой паре (за исключением 1 и 9) цифры могут быть любыми и одинаковыми, в паре 1 и 9 (если она выбрана) цифры одинаковые и не равны нулю, в оставшейся паре цифры различные (любые, если это не пара 1 и 9, и любые, кроме нуля на первом месте, если осталась пара 1 и 9), а средняя цифра произвольная. Всего таких чисел

   $$3 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9 + 10^4 \cdot 9 \cdot 9 = 3240000.$$

   Ответ: 3240000

3. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса AD пересекает описанную окружность треугольника в точке P. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что $ID = DP$. Найдите отношение $AI{:}ID$. (20 баллов)

Решение: Из условия следует, что AI и BI – биссектрисы треугольника ABC. Пусть $\angle BAP = \angle CAP = \alpha$ и $\angle ABI = \angle CBI = \beta$. Тогда $\angle CBP = \alpha$, как вписанный, и поэтому $\angle IBP = \alpha + \beta$. Заметим, что $\angle BIP = \angle BAP + \angle ABI = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника AIB. Это означает, что треугольник BIP – равнобедренный и $PI = PB$. Пусть $PD = DI = x$, тогда $PB = 2x$. Опишем около треугольника ADB окружность ω. Поскольку $\angle CBP = \angle PAB$, прямая PB является касательной к окружности ω, поэтому $PD \cdot PA = PB^2$. Отсюда $PA = 4x$, $AI = PA - PI = 2x$ и $AI{:}ID = 2{:}1$.



Ответ: 2:1

Замечание: Доказанный в задаче факт о том, что $PI = PB$ (и, соответственно, $PI = PC$), называется *леммой о трезубце*. Ссылка на лемму принимается без доказательства.

4. Назовём различные натуральные числа m и n *родственными*, если сумма наименьшего натурального делителя числа m, отличного от 1, и наибольшего натурального делителя числа m, отличного от m, равна n, а сумма наименьшего натурального делителя числа n, отличного от 1, и наибольшего натурального делителя числа n, отличного от n, равна m. Найдите все пары родственных чисел. (20 баллов)

Решение: Будем обозначать через $S(x)$ и $L(x)$ соответственно наименьший натуральный делитель числа x, отличный от 1, и наибольший натуральный делитель числа x, отличный от x. Ясно, что $x \neq 1$, ведь в этом случае $S(x)$ и $L(x)$ не существуют. Любая родственная пара m и n является решением системы

$$\begin{cases} S(m) + L(m) = n \\ S(n) + L(n) = m \end{cases}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $n > m$. Заметим, что если число x простое, то $S(x) = x, L(x) = 1$. Это означает, что числа m и n не могут быть одновременно простыми. Действительно, ведь тогда $n = m + 1$ и $m = n + 1$, что невозможно.

Если число m является простым, то $S(m) = m, L(m) = 1$ и тогда $n = m + 1$. Как было доказано, число n не может быть простым, тогда n составное и $L(n) \neq 1, S(n) \neq n$. Если $L(n) < \frac{n}{2}$, то $L(n) \leq \frac{n}{3}$

и $S(n) \le \frac{n}{3}$. Но тогда $m = n - 1 = S(n) + L(n) \le \frac{2n}{3}$, откуда $n \le 3$, что невозможно. Значит $L(n) = \frac{n}{2}$ и $S(n) = 2$, откуда $m = n - 1 = S(n) + L(n) = 2 + \frac{n}{2}$. Решением этого уравнения является $n = 6$, и тогда $m = 5$. Число n не может быть простым, так как тогда $m > n$.

Ответ: 5 и **6**

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Найдите максимальное значение выражения $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$. (20 баллов)

Решение: Если $a = b = c = \frac{1}{3}$, то $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{16}{7}$. Докажем, что $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} \le \frac{16}{7}$. Преобразуем выражение к виду $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{abc+ab+bc+ac+a+b+c+1}{abc+1} = 1 + \frac{ab+bc+ac+1}{abc+1}$. Докажем, что $\frac{ab+bc+ac+1}{abc+1} \le \frac{9}{7}$. Сделаем замену $c = 1 - a - b$ и будем доказывать неравенство

$$7(ab + (a + b)(1 - a - b) + 1) \le 9(ab(1 - a - b) + 1),$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$9a^2b + 9ab^2 - 16ab - 7a^2 - 7b^2 + 7a + 7b - 2 \le 0.$$

Поскольку $a + b < 1$, то хотя бы одна из переменных меньше, чем $\frac{7}{9}$ – пусть это будет b. Перепишем неравенство в виде

$$(9b - 7)a^2 + (9b^2 - 16b + 7)a - 7b^2 + 7b - 2 \le 0.$$

Поскольку $9b - 7 < 0$, для выполнения полученного неравенства при любых $0 < a < 1$ достаточно доказать, что левая часть не имеет решений относительно a, то есть что дискриминант квадратного уравнения

$$(9b - 7)a^2 + (9b^2 - 16b + 7)a - 7b^2 + 7b - 2 = 0$$

неположителен.

$$D = (9b^2 - 16b + 7)^2 + 4(9b - 7)(7b^2 - 7b + 2) = (9b - 7)^2(b - 1)^2 + 4(9b - 7)(7b^2 - 7b + 2)$$
$$= (9b - 7)(9b^3 + 3b^2 - 5b + 1) = (9b - 7)(b + 1)(3b - 1)^2 \le 0,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: $\mathbf{\frac{16}{7}}$

11 класс

1. В вершинах правильного двенадцатиугольника в некотором порядке расставили натуральные числа от 1 до 12 (каждое по одному разу). Могло ли случиться так, что суммы всех пар соседних чисел являются простыми и суммы всех пар чисел, между которыми стоят ровно два числа, тоже являются простыми? (20 баллов)

   Решение: Каждое число в вершине участвует ровно в четырёх суммах. Заметим, что для получения простой суммы к числам 6 и 12 можно прибавить только $1, 5, 7$ и 11. Значит для вершин, в которых стоят числа 6 и 12, наборы соседних чисел и чисел, стоящих от них через две вершины, должны совпадать. Однако, для каждой вершины эти наборы различны, поэтому хотя бы одна из сумм не будет являться простым числом.

   Ответ: не могло

2. Сколькими способами в таблице 3×3 можно расставить числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом столбце сверху-вниз и в каждой строке слева-направо числа шли в порядке возрастания? (20 баллов)

   Решение: Пронумеруем клетки таблицы так, как показано на рисунке. Ясно, что в левой верхней клетке стоит число 1, а в правой нижней – число 9.

1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	9

По условию $a_5 > a_2, a_5 > a_4, a_5 < a_6, a_5 < a_8$, поэтому $4 \leq a_5 \leq 6$. Рассмотрим случаи.

1) Если $a_5 = 4$, то числа a_2 и a_4 – это 2 и 3. Способов их расстановки всего 2. Теперь вычислим количество вариантов выбора чисел a_3 и a_6. На их место можно поставить любую из оставшихся пар чисел, причём $a_3 < a_6$, поэтому расстановка каждой пары определяется однозначно. Всего таких пар $C_4^2 = 6$. Оставшиеся два числа расставляются однозначно. Всего получилось $2 \cdot 6 = 12$ вариантов расстановки.

2) Если $a_5 = 6$, то числа a_6 и a_8 – это 7 и 8, и случай аналогичен предыдущему. Получаем ещё 12 вариантов расстановки.

3) Если $a_5 = 5$, то посмотрим, какие числа могут стоять в клетках с номерами a_3 и a_7. На их место нельзя ставить числа 2 и 8, так как эти числа обязаны быть соседями 1 и 9 соответственно. Если $a_3 = 3$, то $a_2 = 2$ и $a_4 = 4$. Любое из оставшихся чисел можно поставить в клетку a_6 тремя способами, оставшиеся числа ставятся однозначно. Рассмотренный вариант аналогичен случаям

$a_3 = 7, a_7 = 3$ и $a_7 = 7$ – в каждом получаем по 3 варианта расстановки, но были дважды посчитаны случаи, когда числа a_3 и a_7 – это 3 и 7. Всего таких случаев два:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

В итоге получаем $3 \cdot 4 - 2 = 10$ вариантов.

Если ни одно из чисел в клетках a_3 и a_7 не равно 3 или 7, то в клетках a_3 и a_7 могут стоять лишь числа 4 и 6 в любом порядке. Тогда в клетках a_2 и a_4 стоят числа 2 и 3 в любом порядке, а в клетках a_6 и a_8 – числа 7 и 8 в любом порядке. Всего 8 вариантов расстановок.

Все случаи разобраны, искомое число вариантов равно $24 + 10 + 8 = 42$.

Ответ: 42

3. Назовём число x *полуцелым*, если число $2x$ – целое. *Полуцелой частью* числа x назовём наибольшее полуцелое число, не превосходящее x, и будем обозначать $]x[$. Решите уравнение $x^2 + 2 \cdot]x[= 6$. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим два случая.

1) Число x – полуцелое, тогда $]x[= x$ и исходное уравнение примет вид $x^2 + 2x - 6 = 0$. Корнями данного уравнения являются числа $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$, но тогда числа $2x_{1,2}$ не являются целыми, значит решений нет.

2) Имеет место равенство $x = \frac{n}{2} + r$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < r < \frac{1}{2}$, тогда $]x[= \frac{n}{2}$ и исходное уравнение примет вид $\left(\frac{n}{2} + r\right)^2 + n - 6 = 0$. Выразим из уравнения r и получим

$$r = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{6 - n}.$$

Решения существуют только при $n \leq 6$. Найдём все n, удовлетворяющие неравенству

$$0 < -\frac{n}{2} \pm \sqrt{6 - n} < \frac{1}{2},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{n}{2} < \pm\sqrt{6 - n} < \frac{n + 1}{2}.$$

Если $n \geq 0$, то $\frac{n+1}{2} > 0$ и может иметь решение только лишь неравенство

$$\frac{n}{2} < \sqrt{6 - n} < \frac{n + 1}{2},$$

которое после возведения в квадрат равносильно

$$n^2 < 4(6-n) < (n+1)^2,$$

$$\begin{cases} n^2 + 4n - 24 < 0 \\ n^2 + 6n - 23 > 0 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы выполняется при $-2-2\sqrt{7} < n < -2+2\sqrt{7}$, а второе неравенство – при $n > -3+4\sqrt{2}$ или $n < -3-4\sqrt{2}$. Поскольку $2 < -3+4\sqrt{2} < 3$, $3 < -2+2\sqrt{7} < 4$, и $-3-4\sqrt{2} < -2-2\sqrt{7}$, то $n = 3$ – единственное целое значение, удовлетворяющее системе. В этом случае $x = \frac{n}{2} + r = \sqrt{6-n} = \sqrt{3}$.

Если $-1 < n < 0$, то решений нет, так как n – целое.

Если $n \leq -1$, то $\frac{n+1}{2} \leq 0$ и может иметь решение только лишь неравенство

$$\frac{n}{2} < -\sqrt{6-n} < \frac{n+1}{2},$$

которое после возведения в квадрат равносильно

$$n^2 > 4(6-n) > (n+1)^2,$$

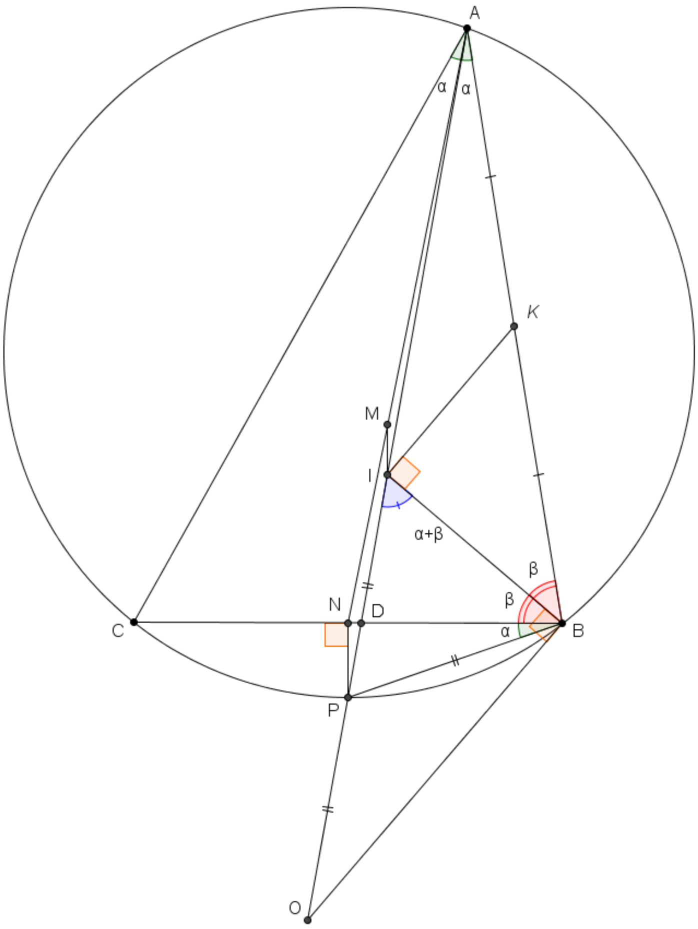
$$\begin{cases} n^2 + 4n - 24 > 0 \\ n^2 + 6n - 23 < 0 \end{cases}.$$

Второе неравенство системы выполняется при $-3-4\sqrt{2} < n < -3+4\sqrt{2}$, а первое неравенство – при $n > -2+2\sqrt{7}$ или $n < -2-2\sqrt{7}$. Поскольку $-9 < -3-4\sqrt{2} < -8$, $-8 < -2-2\sqrt{7} < -7$, и $-3+4\sqrt{2} < -2+2\sqrt{7}$, то $n = -8$ – единственное целое значение, удовлетворяющее системе. В этом случае $x = \frac{n}{2} + r = -\sqrt{6-n} = -\sqrt{14}$.

Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{3}, -\sqrt{14}}$

4. В неравнобедренном треугольнике ABC точка K – середина стороны AB, M – точка пересечения медиан, I – центр вписанной окружности. Известно, что $\angle KIB = 90°$. Докажите, что $MI \perp BC$. (20 баллов)

Решение: Пусть прямая AI пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Из условия следует, что AI и BI – биссектрисы треугольника ABC. Пусть $\angle BAP = \angle CAP = \alpha$ и $\angle ABI =$



$\angle CBI = \beta$. Тогда $\angle CBP = \alpha$, как вписанный, и поэтому $\angle IBP = \alpha + \beta$. Заметим, что $\angle BIP = \angle BAP + \angle ABI = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника AIB. Это означает, что треугольник BIP – равнобедренный и $PI = PB$. Пусть биссектриса внешнего угла треугольника при вершине B пересекает прямую AP в точке O. Тогда $BO \perp BI$, как биссектрисы смежных углов. Треугольник BIO – прямоугольный, причём $\angle BIP = \angle IBP$, а значит $\angle POB = 90° - \angle BIP = 90° - \angle IBP = \angle PBO$ и $PB = PO$.

Так как $\angle OBI = \angle KIB = 90°$, то $IK \parallel OB$, а из того, что $AK = KB$ следует, что IK – средняя линия треугольника ABO. Отсюда получаем, что $AI = IO$ и $AI = 2IP$. Пусть точка N – середина стороны BC. Треугольники AIM и APN подобны, так как $AI{:}IP = AM{:}MN = 2{:}1$, а значит $MI \parallel PN$. Но $PN \perp BC$, поэтому $MI \perp BC$, что и требовалось доказать.

Замечание: Доказанный в задаче факт о том, что $PI = PB$ (и, соответственно, $PI = PC$), называется *леммой о трезубце*, а факт о том, что $PI = PO$, называется *леммой Мансиона*. Ссылки на леммы принимаются без доказательства.

5. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ – множество всех простых чисел, расположенных в некотором порядке. Может ли случиться так, что для всех натуральных i число $\frac{p_i p_{i+1} - p_{i+2}^2}{p_i + p_{i+1}}$ является натуральным? (20 баллов)

Решение: Докажем вспомогательную лемму.

Лемма: простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

Доказательство: предположим, что простых чисел вида $3k+2$ конечное число. Обозначим все такие числа через $q_1, q_2, \dots, q_l$. Число $3q_1q_2 \dots q_l - 1$ не делится на простые числа $q_1, q_2, \dots, q_l$ и даёт остаток 2 при делении на 3. Значит среди его простых делителей должно быть число вида $3k+2$ – противоречие. Лемма доказана.

Вернёмся к решению задачи. Предположим, что такое могло случиться. Тогда существует натуральное m такое, что $p_m = 2$. Значит число $\frac{2p_{m+1}-p_{m+2}^2}{2+p_{m+1}} = 2 - \frac{p_{m+2}^2+4}{2+p_{m+1}} < 2$ является натуральным, откуда $\frac{p_{m+2}^2+4}{2+p_{m+1}} = 1$ и $p_{m+1} = p_{m+2}^2 + 2$. Случай $m > 1$ невозможен, так как тогда число $\frac{2p_{m-1}-p_{m+1}^2}{2+p_{m-1}} = 2 - \frac{p_{m+1}^2+4}{2+p_{m-1}} < 2$ также является натуральным, откуда $\frac{p_{m+1}^2+4}{2+p_{m-1}} = 1$ и $p_{m-1} = p_{m+1}^2 + 2 = (p_{m+2}^2+2)^2 + 2$.

Теперь если $p_{m+2} = 3$, то $p_{m-1} = 123$, что невозможно. Если же $p_{m+2} \neq 3$, то $p_{m+2}^2 \equiv_3 1$ и $p_{m+1} = p_{m+2}^2 + 2 \,\vdots\, 3$, а значит $p_{m+1} = 3, p_{m+2} = 1$, что невозможно. Следовательно, $m = 1$.

Предположим теперь, что нашлись числа p_k и p_{k+1} с различными ненулевыми остатками при делении на 3, то есть $p_k + p_{k+1} \,\vdots\, 3$. Поскольку число $\frac{p_kp_{k+1}-p_{k+2}^2}{p_k+p_{k+1}}$ является натуральным, то $p_kp_{k+1} - p_{k+2}^2 \,\vdots\, 3$. Но тогда $p_{k+2}^2 \equiv_3 p_kp_{k+1} \equiv_3 2$, что невозможно, так как квадраты имеют остатки 0 или 1 при делении на 3. В итоге мы доказали, что числа с остатками 1 и 2 при делении на 3 не могут быть соседними.

Поскольку $p_1 = 2$, это означает, что после p_1 стоят несколько чисел с остатком 2 при делении на 3, затем где-то стоит число 3. Если после тройки стоит число с остатком 2 при делении на 3, то все числа далее будут с таким же остатком и в последовательности простых чисел не будет ни одного числа с остатком 1 при делении на 3 (такие есть, например, число 7). Следовательно, после тройки стоит число с остатком 1 при делении на 3 и все числа за ним имеют такой же остаток. Но тогда до тройки стоит лишь конечное число простых чисел с остатком 2 при делении на 3, что противоречит доказанной лемме. Следовательно, так расставить числа нельзя.

Ответ: не может

Замечание: факт того, что простых чисел бесконечно много, принимается без доказательства.

Критерии оценки

8 класс

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Верно вычислено количество ясных и пасмурных дней, но при подсчете суммарного количества не учтен последний день	18 баллов
Доказано, что количество ночей на одну меньше, чем количество дней	3 балла
Доказано, что количество ясных и пасмурных дней совпадает, но само количество подсчитано неверно	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Логическая ошибка в подсчёте вариантов, когда почти палиндром создаётся из палиндрома при замене цифр в первом или последнем разряде	15 баллов
Количество палиндромов подсчитано верно, но не учтено, что из одного почти палиндрома можно создать палиндром двумя способами	8 баллов
Количество палиндромов подсчитано неверно и не учтено, что из одного почти палиндрома можно создать палиндром двумя способами	5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Длины AB и BC верно выражены через отрезки квадратов, но выражение $AB^2 - BC^2$ посчитано неверно	8 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Верный пример того, что факт не всегда верен	20 баллов
Отсутствие решения или неверный пример того, что факт не всегда верен	0 баллов

9 класс

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что $k \geq 10$	12 баллов
Доказано, что $k \leq 10$	8 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Верное решение, в котором допущена одна арифметическая ошибка, из-за которой было получено постороннее решение ребуса	18 баллов
Разобраны все случаи, кроме $\text{У} = 6, \text{И} = 9, \text{З} = 8, \text{М} \leq 3$	15 баллов
Разобраны все случаи, кроме $\text{У} = 6, \text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 4 \cdot 8 \cdot 7,$ $\text{У} = 6, \text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 4 \cdot 8 \cdot 5,$ $\text{У} = 6, \text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 8 \cdot 9 \cdot 5$	15 баллов
Случай $\text{У} = 6$ разобран верно	14 баллов
Разобраны случаи $\text{У} = 1, \text{У} = 2, \text{У} = 3$	6 баллов
Разобран один или два из случаев $\text{У} = 1, \text{У} = 2, \text{У} = 3$	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Не исключен случай $c = 0$. В остальном решение верное	17 баллов
Получено равенство $y_1 y_2 = -x_1 x_2$ и/или $x_1 x_2 = -1$, где $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	5 баллов
Приведен пример квадратичной функции, дающей все необходимые c, но не доказано, что он подходит	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Верное нахождение порядка всех букв в алфавите	10 баллов
Присутствует идея того, что для определения порядка букв в алфавите следует рассматривать промежутки между соседними факториалами	5 баллов
Верное описание алгоритма восстановления порядка слова в словаре	5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

10 класс

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Не обосновано, что 1234567 не является кубом. В остальном решение верное	17 баллов
Ход решения и ответ верные, но неверно оценено количество цифр в квадрате и кубе	12 баллов
Рассмотрены последние цифры (не все) и доказана невозможность хотя бы четырёх цифр	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Логическая ошибка в подсчёте вариантов, когда почти палиндром создаётся из палиндрома при замене цифр в первом или последнем разряде	15 баллов
Верно посчитано число палиндромов и 71 способ получить почти палиндром (удвоение учтено), но потерян случай нуля на конце	13 баллов
Верно посчитано количество почти палиндромов, полученных заменой одной из четырех цифр в палиндроме	10 баллов
Верно посчитано число палиндромов и 71 способ получить почти палиндром (без удвоения)	8 баллов
При верном способе подсчета не учтено, что палиндром может быть получен из почти палиндрома двумя способами (если он не имеет вид $\overline{a\ldots0}$)	8 баллов
При попытке перейти от палиндрома к почти палиндрому не учтено, что если почти палиндром оканчивается на 0, то он может получиться из единственного палиндрома	-7 баллов
Не учтено, что последняя цифра палиндрома не может быть нулем, но у почти палиндрома в конце вполне может стоять ноль.	-5 баллов
Логически неверно подсчитано количество вариантов в одной группе	-5 баллов
Арифметические ошибки	-2 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном ходе решения “путаница” в обозначении сторон треугольника и, как следствие, неверно вычислено соотношение длин отрезков	15 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Доказано, что одно из чисел обязано быть простым, а второе – составным, найден ответ, но не доказана его единственность	12 баллов
Доказано, что если m – составное, то $n < m$	7 баллов
Верно разобран случай, когда m и n составные (случай простых чисел не рассмотрен или проанализирован неверно)	7 баллов
Доказано, что одно из чисел чётно, а другое нёчетно	5 баллов
Угадана пара 5 и 6 и проверено, что они подходят	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Приведён верный ответ при $a = b = c = \frac{1}{3}$, но не доказано, что он максимальный	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

11 класс

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Неверный пример расстановки чисел или неполный перебор случаев расстановки чисел	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Все варианты описаны верно, но при подсчете их суммарного количества допущена арифметическая ошибка	18 баллов
Посчитан один лишний вариант таблицы и симметричный ему. Остальное верно	17 баллов
В работе представлена верная схема разбора случаев, правильно посчитаны варианты расстановки, но упущена ровно одна «ветвь» случаев	17 баллов
Найдены все верные варианты расстановки элементов таблицы, но при этом добавлены лишние расстановки, которые противоречат верно доказанным в работе ограничениям на элементы	17 баллов
Неверно посчитано количество вариантов расстановки двух цифр в две клетки. В остальном решение верное	13 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Доказано, что среди чисел таких, что $0{,}5 \leq \{x\} < 1$ корнем может являться лишь число $x = \sqrt{3}$	10 баллов
Верно рассмотрен случай $x > 0$, найден корень $x = \sqrt{3}$	10 баллов
Верно рассмотрен случай $x < 0$, найден корень $x = -\sqrt{14}$	10 баллов
Верно разобран случай $x =]x[$. В случае $x \neq]x[$ получено представление для корня через полуцелую часть числа	8 баллов
При доказанном факте того, что $x = \pm\sqrt{t}$, где t – целое, обосновано, что x не может быть целым, и найдены корни $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{14}$	5 баллов
Верно разобран случай $x =]x[$	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Доказано, что описанная ситуация возможна лишь при $p_1 = 2, p_2 = 11, p_3 = 3$, но невозможность этого случая не доказана	15 баллов
Доказано, что $p_i \neq 2$ при $i > 2$	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов