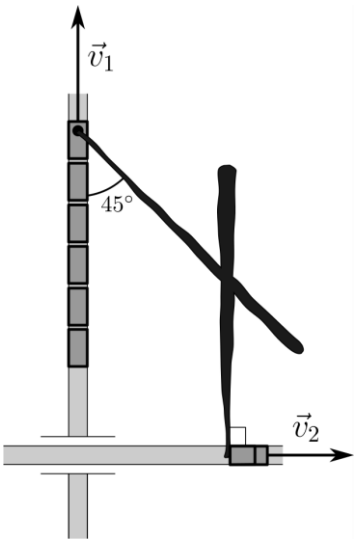
Физика 8 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

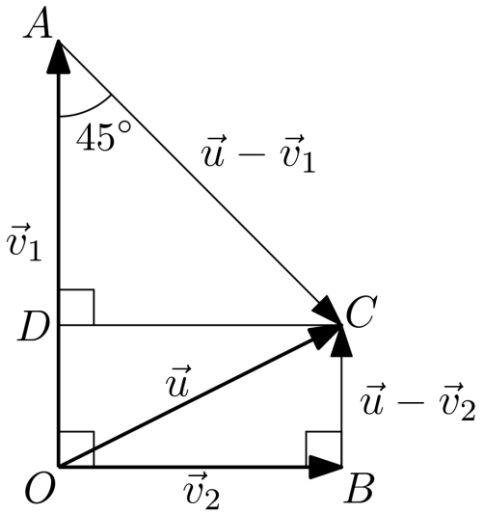
Задание 1: Дым по ветру (30 баллов)

Тепловоз и старый грузовик движутся по рельсам и автомобильной дороге, пересекающимися под прямым углом, оставляя за собой дымовой шлейф, как показано на рисунке (вид сверху). Скорость тепловоза — v_1, грузовика — v_2. Найдите скорость ветра, приводящего к сносу дымовых шлейфов. Каким должно быть соотношение между скоростями тепловоза и грузовика?



Решение

Обозначим скорость ветра за *u*. Рассмотрим момент, когда грузовик проезжает переезд, дымовой шлейф грузовика в этот момент совпадает с линией железнодорожных путей. Положение точки пересечения шлейфов в тот момент совпадает с положением тепловоза (обозначим его O). Рассмотрим перемещение шлейфов за единичный промежуток времени. Тепловоз переместится в точку *A*, шлейф от грузовика сместится вправо на v_2, оставаясь параллельным железнодорожным путям, а точка пересечения шлейфов под действием ветра сместится из *O* в положение *C* на *u* (см. рисунок). Дымовые шлейфы будут расположены вдоль отрезков *AC* и *CB*. Пользуясь геометрическими соображениями, найдём *u*.



В треугольнике *ADC* сторона *DC* равна v_2, т. к. *ODCB* — прямоугольник. Поскольку один из углов в прямоугольном треугольнике *ADC* равен 45°, этот треугольник равнобедренный и $AD = DC = v_2$. Тогда отрезок *OD* равен $v_1 - v_2$. Теперь применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ODC: $OC^2 = OD^2 + DC^2$; $u^2 = (v_1 - v_2)^2 + {v_2}^2$. Отсюда $u = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + v_2^2}$. Очевидно, чтобы данное построение было возможным, должно выполняться условие $v_1 > v_2$

Ответ: $u = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + v_2^2}$, $v_1 > v_2$.

Критерий	**Баллы**
Рассмотрено перемещение точки пересечения шлейфов	10
Сделан рисунок, позволяющий найти скорость ветра	10
Получено выражение для скорости ветра	5
Получено соотношение скоростей	5

Задание 2: Труба в печи (25 баллов)

Однородную трубу из металла нагревают в индукционной печи в вертикальном положении от температуры T_0 до T_1. Как потратить меньше тепла - подвесив её на нерастяжимой нити или поставив на жесткий пол в печи? Температуру в печи при нагреве считать одинаковой во всех точках.

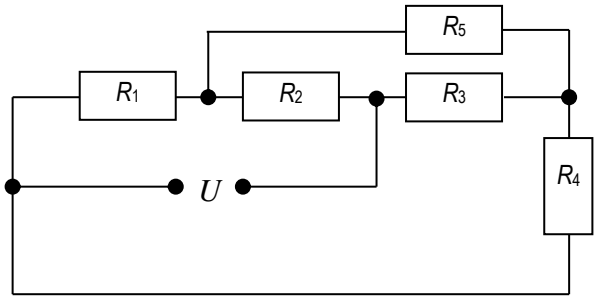
Решение:

При нагревании труба расширяется, увеличивается ее длина. Если труба подвешена на нити, ее центр тяжести опускается, если поставлена на пол – поднимается, поэтому в первом случае потребуется меньше энергии на нагрев. Помимо теплового расширения трубы, в процессе нагрева возникает ряд физических явлений, которые в той или иной степени влияют на ответ. Пол в печи может деформироваться, что скажется и на движении центра тяжести трубы. Может изменяться длина нити, причем не обязательно в сторону увеличения. Конвекцию воздуха в печи следует исключить, так как в условии указано, что температура в любой точке одинакова. В любом случае разница в энергии между двумя вариантами нагрева оказывается незначительной.

Критерий	**Баллы**
Указаны физические явления, влияющие на процесс нагрева	10
Определено, ведут они к дополнительным затратам энергии, или нет	10
Показана разница между двумя способами нагрева трубы	5

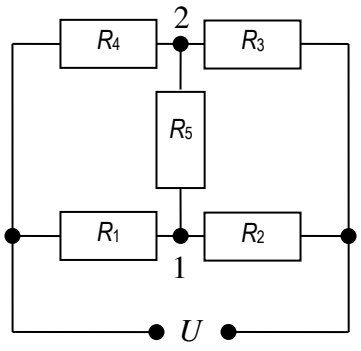
Задание 3. Неделимый делитель (25 баллов)

Найдите силу тока, текущего через сопротивление R_5, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$ *Ом*, $R_5=3$ *Ом*, $U = 12$ *В*. Найдите также общее сопротивление цепи.



Решение

Решение задачи следует начать с составления эквивалентной схемы, которая приведена на рисунке справа.



Получившаяся эквивалентная схема представляет собой мостовую схему, состоящую из одинаковых резисторов с сопротивлением $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$ *Ом*. Поскольку схема симметрична, то очевидно, что разность потенциалов между точками 1 и 2 будет равна нулю, поэтому тому через резистор R_5 также будет равен нулю.

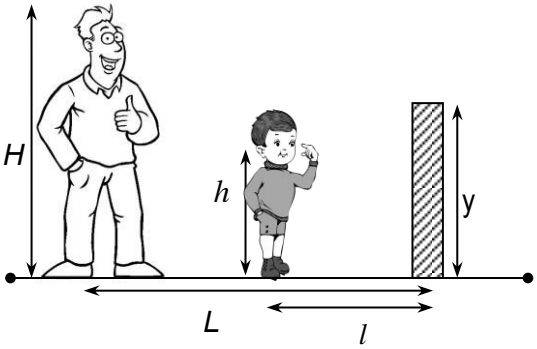
В виду отсутствия протекания тока через резистор R_5 для определения полного сопротивления цепи мы можем использовать формулу для сопротивления двух параллельных цепочек резисторов, причем каждая цепочка состоит из двух одинаковых последовательно расположенных резисторов R.

Таким образом, сопротивление будет равно: $R_{Общ} = \dfrac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R = 10 Ом$.

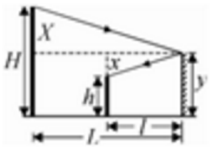
Критерий	Баллы
Составлена эквивалентная схема	10
Установлена нулевая разность потенциалов 1-2	5
Определен ток через резистор	5
Подсчитано общее сопротивление	5

Задание 4: Низкое зеркало (20 баллов)

Отец с сыном стоят напротив плоского зеркала, закрепленного на вертикальной стене, причем нижний край зеркала находится у пола. Расстояние от зеркала до сына l = 3 *м*, а расстояние от зеркала до его отца L = 6 *м*. На каком минимальном расстоянии y от пола должен находиться верхний край зеркала, чтобы сын мог видеть в зеркале отца в полный рост? Расстояние от пола до уровня глаз сына h = 1.2 *м*, рост отца H = 1.8 *м*. Ответ приведите в метрах, округлив до одного знака после запятой.



Решение



Ход луча света, идущего от верхней части головы отца и попадающего в глаз сыну, показан на рисунке справа.

С учетом закона отражения, из подобия изображенных на рисунке треугольников следует равенство

$$\frac{X}{L} = \frac{x}{l}.$$

Кроме того, справедливы соотношения $H - X = h + x = y$. Решая записанную систему уравнений, находим

$$y = \frac{Hl + hL}{L + l} = 1.4 м.$$

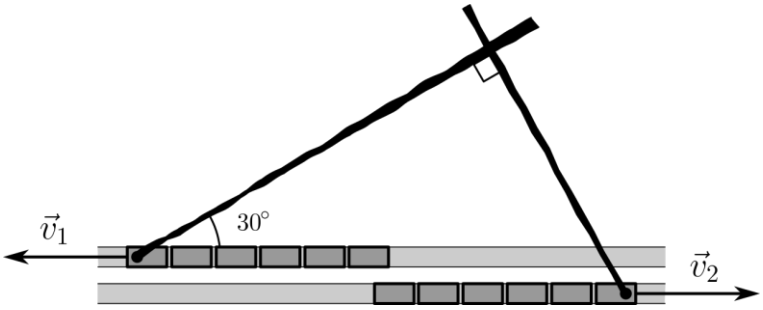
Критерий	Баллы
представлен верный чертёж	5
Рассмотрены подобные треугольники	5
составлена система уравнений	5
получено верное численное решение	5

Физика 8 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

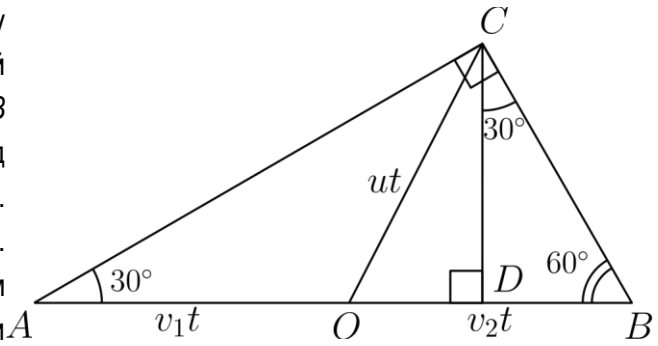
Задание 1: Дым по ветру (30 баллов)

Найдите скорость ветра по рисунку (вид сверху), на котором представлены два дымовых шлейфа от встречных тепловозов, движущихся со скоростями v_1=60 км/ч и v_2=40 км/ч по прямолинейному участку пути в направлении, указанном стрелками. Расстоянием между путями пренебречь.



Решение

Обозначим скорость ветра за *u*. Рассмотрим точку встречи тепловозов O. За время *t* первый и второй тепловозы переместятся в точки *A* и *B* соответственно, а точка пересечения шлейфов под действием ветра сместится в положение *C* (см. рисунок). Отрезки *AO*, *BO* и *CO* равны v_1t, v_2t и *ut*. Дымовые шлейфы будут параллельны отрезкам AC и CB. Пользуясь геометрическими соображениями, найдём длину отрезка CO.



В прямоугольном треугольнике *ABC* напротив угла в 30° лежит катет *CB*, равный половине длине гипотенузы: $CB = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t$; угол ∠B равен 60°. Проведём в треугольнике *ABC* высоту CD. В прямоугольном треугольнике CDB острые углы равны 60 и 30°, найдём его катеты. Лежащий против угла в 30° катет DB равен половине гипотенузы CB, т. е. $\frac{1}{4}(v_1 + v_2)t$; катет DC найдём с помощью теоремы Пифагора

$$DC = \sqrt{CB^2 - DB^2} = \sqrt{\frac{3}{16}(v_1 + v_2)^2 t^2}.$$

Наконец, из прямоугольного треугольника ODC можно найти искомый отрезок CO: $CO = \sqrt{OD^2 + DC^2}$; $OD = BO - DB = \frac{3}{4}v_2 t - \frac{1}{4}v_1 t$.

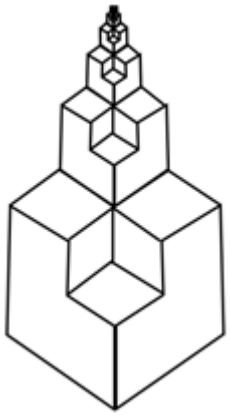
$$CO = ut = \sqrt{\left(\frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_1\right)^2 t^2 + \frac{3}{16}(v_1 + v_2)^2 t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(v_1^2 + 3v_2^2)t^2}.$$

Следовательно, скорость ветра $u = \frac{1}{2}\sqrt{(v_1^2 + 3v_2^2)} = 46\ \text{км/ч}$.

Критерий	Баллы
Рассмотрено перемещение точки пересечения шлейфов	10
Сделан рисунок, позволяющий найти скорость ветра	10

Получено выражение для скорости ветра	5
Получен численный ответ	5

Задание 2: Конкурс ледяных скульптур (30 баллов)



Мастер Вася серьёзно подготовился к конкурсу ледяных скульптур: взял ледяной куб со стороной L =1 *м* и вырезал из его угла куб со в два раза меньшей стороной. С вырезанным кубиком он повторил ту же процедуру, и так далее. Седьмой кубик показался ему слишком маленьким, и он его просто выкинул. Далее он охладил 1-ю, 3-ю и 5-ю детали до T_1=−50°*C*, а 2-ю, 4-ю и 6-ю – до T_2=−15°*C*, и собрал из них свою скульптуру. Определите установившуюся температуру Васиной скульптуры, которая, несомненно, завоюет первый приз. Теплопотерями можно пренебречь.

Решение

Данных в задаче достаточно для того, чтобы найти объёмы всех деталей, после чего написать уравнение теплового баланса и получить ответ. Однако, этого можно и не делать, увидев определённые закономерности в условии задачи.

Обозначим массу первой детальки за m. Заметим: каждая следующая деталька имеет объём ровно в восемь раз меньший, чем предыдущая. Следовательно, масса соседних деталек также отличается в 8 раз; в частности, масса второй детальки равняется $m/8$. Разобьём теперь детальки на пары: 1я со 2й, 3я с 4й, 5я с 6й. В каждой паре большая деталька имеет температуру T_1=−50°C, а меньшая - T_2=−15°C, а массы их отличаются в восемь раз. Следовательно, установившаяся температура будет одна и та же в каждой такой паре, и будет равняться установившейся температуре всей скульптуры. Выразим указанную температуру, что и будет ответом задачи:

Здесь мы сразу сократили множитель удельной теплоёмкости льда в уравнении теплового баланса, т.к. он встречается в каждом слагаемом.

Ответ: Установившаяся температура Васиной скульптуры будет равняться −46°C.

Критерий	**Баллы**
Простой вариант	
Догадка о принципе попарного разбиения	10
Уравнение попарного теплового баланса	10
Получение верного числового ответа	10
Длинный вариант	
Уравнение теплового баланса	10
Связь стороны сегмента с его объемом	5
Связь объема сегмента с его тепловой энергией	5
Получение числового ответа	10

Задание 3: Кольцо из проволоки (20 баллов)

Из куска проволоки с сопротивлением 5 Ом изготовлено кольцо. В каком отношении по длине должны делить окружность точки подключения проводов, чтобы сопротивление между ними оказалось равным 1 Ом?

Решение:

Точки подключения назовем A и B, они делят окружность на две части. Сопротивление одной из частей обозначим R_1, а другой – R_2. По формуле параллельного соединения:

$$R_{\text{AB}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

Причем

$$R_2 = R - R_1, \quad (2)$$

где R = 5 Ом.
Подставляя (2) в (1), и замечая, что R = 5 Ом, R_{AB} = 1 Ом, получаем уравнение:

$$R_1^2 - 5R_1 + 5 = 0 \quad (3)$$

Из (3) находим

$$R_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

Остается получить ответ:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = 2{,}62 \quad (5)$$

Критерий	**Баллы**
Записана формула для параллельного соединения резисторов	5
Получено квадратное уравнение, аналогичное (3)	10
Получен верный численный ответ	5

Задание 4: Короткий луч (20 баллов)
Луч, исходящий из точки A, отражается от плоского зеркала в точке K и проходит в точку B. Докажите, что путь AKB самый короткий из всех возможных путей от A к зеркалу и оттуда в точку B.

Решение:
Мы знаем, что в однородной среде свет распространяется прямолинейно, т. е. скорейшим путем. Но свет избирает скорейший путь также и в том случае, когда не идет от одной точки к другой непосредственно, а достигает ее, предварительно отразившись от зеркала.
Проследим за его путем. Пусть буква A на рис. 1 обозначает источник света, линия MN — зеркало, а линия ABC — путь луча от свечи до глаза C. Прямая KB перпендикулярна к MN.
По законам оптики угол отражения 2 равен углу падения 1. Зная это, легко доказать, что из всех возможных путей от A к C, с попутным достижением зеркала MN, путь ABC — самый скорый. Для этого сравним путь луча ABC с каким-нибудь другим, например с ADC (рис. 2). Опустим перпендикуляр AE из точки A на MN и продолжим его далее до пересечения с продолжением луча BC в точке F. Соединим также точки F и D. Убедимся, прежде всего, в равенстве треугольников ABE и EBF. Они — прямоугольные, и у них общий катет EB; кроме того, углы EFB и EAB равны между собой, так как соответственно равны углам 2 и 1. Следовательно, AE = EF. Отсюда вытекает равенство прямоугольных треугольников AED и EDF по двум катетам и, следовательно, равенство AD и DF.

Ввиду этого мы можем путь ABC заменить равным ему путем CBF (так как AB = FB), а путь ADC — путем CDF. Сравнивая же между собой длины CBF и CDF, видим, что прямая линия CBF короче ломаной CDF. Отсюда путь ABC короче ADC, что и требовалось доказать!

Где бы ни находилась точка D, путь ABC всегда будет короче пути ADC, если только угол отражения равен углу падения. Значит, свет действительно избирает самый короткий и самый скорый путь из всех возможных между источником, зеркалом и глазом. На это обстоятельство впервые указал еще Герон Александрийский, замечательный греческий механик и математик II века.

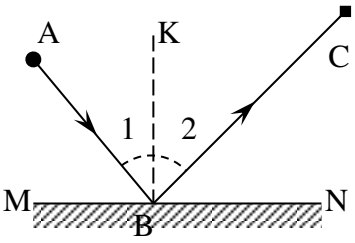


рис. 1

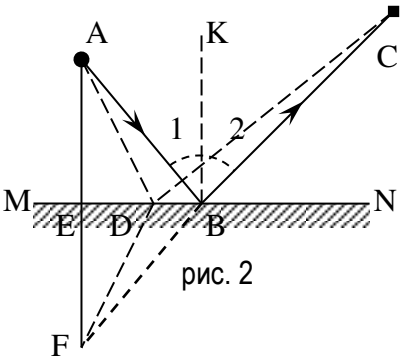


рис. 2

Критерий	**Баллы**
Законы оптики прямолинейного распространения/отражения света	5
Построен поясняющий рисунок	5
Доказано равенство некоторых треугольников и соответствующих отрезков	10

Физика 9 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Последняя ступень (20 баллов)

Последняя ступень ракеты имеет два маршевых двигателя, которые могут сообщать ей постоянные ускорения a_1 и a_2, направленные вертикально вверх. Первый двигатель рассчитан на работу в течение времени t_1, второй – t_2, $a_1 > a_2$, $t_1 < t_2$. Двигатели могут включаться как одновременно, так и последовательно. Какой порядок включения двигателей следует выбрать для того, чтобы к моменту окончания работы двигателей ракета поднялась на максимальную высоту?

Решение

При одновременном включении двигателей силы их тяги складываются, следовательно, сначала ракета будет двигаться с ускорением $a_1 + a_2$ в течение t_1, а затем в течение $t_2 - t_1$ с ускорением a_2. За это время ракета поднимется на высоту

$$h_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)t_1^2 + (a_1 + a_2)t_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} - \frac{a_1 t_1^2}{2} + a_1 t_1 t_2.$$

Далее рассмотрим случай последовательного запуска двигателей. Высота подъёма ракеты зависит от порядка включения двигателей. Если первым включили двигатель, обеспечивающий ускорение a_1, итоговая высота ракет будет

$$h_2 = a_1\frac{t_1^2}{2} + (a_1 t_1)t_2 + a_2\frac{t_2^2}{2},$$

в противоположном случае

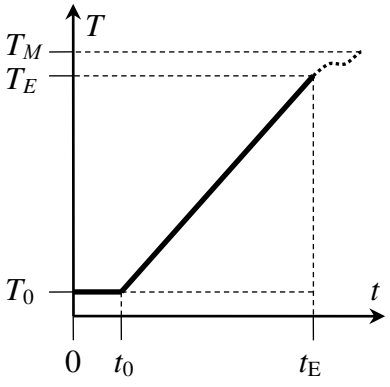
$$h_3 = a_2\frac{t_2^2}{2} + (a_2 t_2)t_1 + a_1\frac{t_1^2}{2}.$$

Очевидно, из трёх приведённых высот наибольшей будет h_2, следовательно, двигатели нужно включать последовательно, запустив сначала двигатель, обеспечивающий большее ускорение.

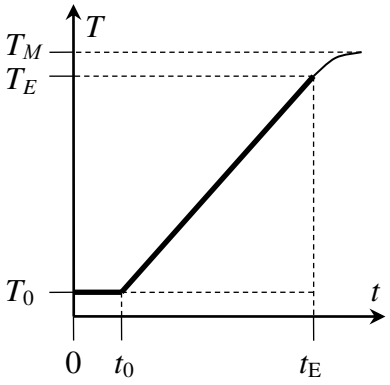
Критерий	Баллы
Записана высота ракеты после одновременной работы двигателей (h_1)	5
Учен порядок последовательного запуска двигателей	10
Записана высота ракеты после последовательной работы двигателей (h_2 или h_3)	5

Задание 2. Водонагреватель (30 баллов)

При включении в сеть с напряжением U накопительного водонагревателя температура, воды, отбираемой с самого верха его бака, начинает расти не сразу, а спустя некоторое время t_0 после момента включения. Используя график, определите массу воды m в баке и конечную температуру T_M отбираемой жидкости спустя некоторое время после момента выключения t_E, за которое установится тепловое равновесие. Обычный накопительный водонагреватель оснащается массивным ТЭН-ом (электроводонагревателем), расположенным на дне устройства и имеющем сопротивление R. Весь бак с водой теплоизолирован и герметичен. Теплоёмкость воды считать известной.



Решение



Очевидно, что задержка роста температуры после включения нагревателя определяется теплоёмкостью некоторой совокупности элементов – спирали, корпуса ТЭН-а и некоторым слоем воды, который успевает нагреться до запуска процессов конвекции и теплопроводности.

Единственный вариант простого решения этой задачи – это оценить, сколько тепловой энергии успела накопить система ТЭН-бак-вода до того, как начался рост температуры. Очевидно, что это количество может быть найдено по закону Джоуля-Ленца для нагревателя, который потребляет из сети электрическую мощность $P = U \cdot I = U^2/R$, переводя её в теплоту Q:

$$Q_0 = P \cdot t_0 = \frac{U^2 t_0}{R}. \qquad (1)$$

Затем процесс нагревания идет «как положено» с ростом температуры от времени. Если мы знаем начальную температуру T_0 и время t_0 и конечные их значения T_E и t_E, то можем записать уравнение теплового баланса, которое после необходимых преобразований сведётся к:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_E - T_0) = c \cdot m \cdot \Delta T.$$

С другой стороны за время $\Delta t = t_E - t_0$ выделяется теплота, эквивалентная работе э.д.с.: $Q = A_{ЭЛ} = \frac{U^2 \Delta t}{R}$. Отсюда:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U^2}{c \cdot m \cdot R} \Rightarrow m = \frac{\Delta t}{\Delta T} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R} = \frac{t_E - t_0}{T_E - T_0} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R}.$$

Что же касается конечной температуры, то очевидно, что она будет достигнута не сразу в момент выключения нагревателя, а только спустя некоторое время, которое потребуется, чтобы в системе установилось тепловое равновесие. В условиях отсутствия теплопотерь равновесие установится только после того, как вся ранее накопленная «скрытая» теплота, которая была необходима для запуска процесса нагрева «как положено» перейдёт в теплоту нагрева воды в баке, что и приведёт к выравниванию температур во всех точках системы. Тогда:

$$Q_0 = c \cdot m \cdot (T_M - T_E) \Rightarrow T_M = T_E + \frac{Q_0}{c \cdot m}.$$

Подставляя полученные ранее выражения, получаем:

$$T_M = T_E + t_0 \frac{T_E - T_0}{t_E - t_0} = \frac{T_E t_E - T_0 t_0}{t_E - t_0}.$$

Критерий	**Баллы**
Предположение о накоплении энергии зам время t_0	10
Записан закон Джоуля-Ленца (1)	5
Выражение для определения m	10
Выражение для определения T_M	5

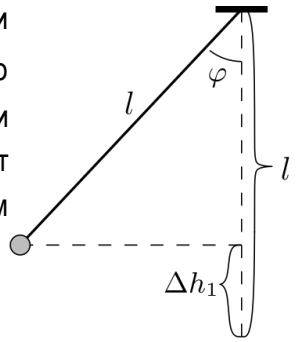
Задание 3. Лампочка в лифте (25 баллов)

В кабине лифта к потолку подвешен математический маятник (небольшое тело, например, лампочка Ильича на нерастяжимом невесомом проводе). Маятник отклонили на 90° от вертикали и отпустили. В момент прохождения лампочкой точки равновесия лифт начал двигаться вверх с постоянным ускорением а. Найти максимальный угол отклонения лампочки от равновесия в движущемся лифте.

Решение

Из закона сохранения энергии кинетическая энергия лампочки при прохождении равновесия будет равна изменению её потенциальной энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\Delta h = mgl,$$



l – длина подвеса лампочки. Скорость лампочки в нижней точке траектории $v = \sqrt{2gl}$. Движение лампочки в ускоренно движущемся лифте эквивалентно её движению в поле тяжести с ускорением свободного падения равным *g* + *a* и направленным вниз. В этом случае потенциальная энергия лампочки будет равна$m(g+a)h$. Тогда из закона сохранения энергии при максимальном отклонении лампочки

$$m(g+a)\Delta h_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение высоты лампочки при отклонении на угол φ равно $\Delta h_1 = l - lcos\varphi = l(1 - cos\varphi)$.

Имеем

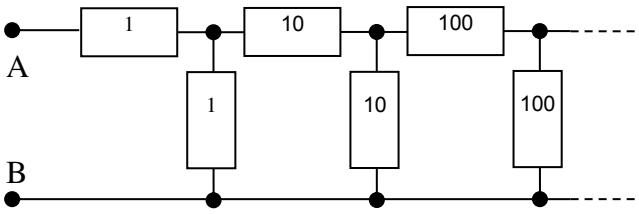
$$m(g+a)l(1 - cos\varphi) = mgl,$$

откуда $cos\varphi = \frac{a}{g+a}$, или $\varphi = arccos\frac{a}{g+a}$.

Критерий	Баллы
Записан закон сохранения энергии в неподвижном лифте	5
Показана эквивалентность движения в ускоренно движущемся лифте и в поле тяжести	10
Записан закон сохранения энергии в движущемся лифте	5
Получен верный ответ	5

Задание 4. Длинная цепь (25 баллов)

В спец. устройстве есть резисторный 20-ти звенный делитель – цепь, содержащая 20 пар резисторов. Сопротивления резисторов в паре равны и нарастают между соседними парами каждый раз в 10 раз относительно предыдущей пары. Найдите входное сопротивление делителя (между точками А и В).



Решение

Из условия видно, что сопротивления звеньев быстро возрастают, поэтому для приближённого вычисления можно не учитывать вклад «удалённых» от входа звеньев. При этом ответ почти не изменится. Пусть мы отбрасываем все звенья кроме первого – тогда сопротивление составит R_1 = 2 *Ом*. Далее оставляем два первых звена – получаем последовательно-параллельную двухзвенную схему, сопротивление которой:

$$R_2 = 1 + \frac{1 \cdot 20}{1 + 20} \cong 1.952 Ом.$$

Для трёх звеньев R_3 = 1.951 *Ом*, т.е. то же с точностью до 3-го знака. Можно этим и ограничиться, ну а можно включить ещё несколько звеньев, однако ответ будет меняться всё меньше и меньше по порядку величины.

Другой способ заключается в следующем. Если мы представим цепь с бесконечным числом звеньев, то вся цепь справа от 20-го звена изменит измеряемое сопротивление очень мало, поэтому можно рассчитывать на точность результата. Пусть Искомое сопротивление *Z*, тогда если мы отбросим первое звено, то сопротивление всей оставшейся бесконечной цепи с хорошей точностью будет 10*Z*. После этого рассмотрим цепь, в которой есть первое звено, а вся остальная цепь заменена на сопротивление 10*Z*, тогда:

$$Z = 1 + \frac{1 \cdot 10Z}{1 + 10Z},$$

т.е. получаем квадратное уравнение $10Z^2 - 19Z - 1 = 0$.

Отсюда $Z = \left(19 + \sqrt{401}\right) / 20 \cong 1.951 Ом$.

Критерий	**Баллы**
Метод последовательного приближения	
Составление последовательно-параллельной схемы	10
Расчёт её сопротивления	5
Показано, что при увеличении звеньев ответ почти не меняется	10
Метод бесконечной цепи	
Рассмотрение бесконечной цепи	10
Составление квадратного уравнения	10
Нахождение ответа	5

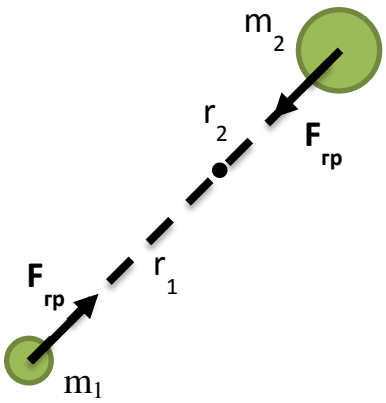
Физика 9 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Неожиданный поворот (30 баллов)

Два космических тела с массами 7 и 10 *m* вращаются вокруг общего центра масс вдали от других тел. В результате катаклизма масса большего тела уменьшилась на 30%. На сколько процентов изменился период обращения?

Решение:



Сделаем два упрощающих решение предположения:

1). Тела до и после катаклизма движутся по круговым орбитам

2). Диаметры орбит остаются неизменными

В системе отсчета, связанной с центром масс, между телами действует сила гравитационного притяжения

$$F_{\text{гр}} = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \qquad (1)$$

которая сообщает им центростремительное ускорение. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m_1\omega^2 r_1 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} \qquad (2)$$

$$m_2\omega^2 r_2 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \qquad (3)$$

где ω – угловая скорость вращения тел вокруг центра масс, связанная с периодом обращения соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (4)$$

Складывая (2) и (3), получаем

$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^3}. \qquad (5)$$

Подстановка (5) в (4) дает выражение для периода T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}}. \qquad (6)$$

С учетом предположений, выдвинутых в начале, согласно формуле (6), период обращения T зависит только от масс космических тел. Соотношение периодов до и после катастрофы

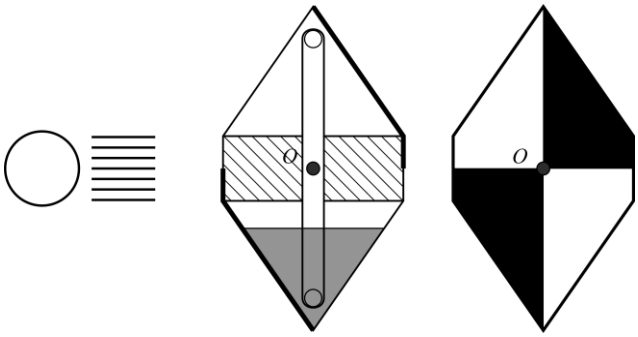
$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1+0{,}7m_2}} = 1{,}1 \qquad (7)$$

Критерий	**Баллы**
Сделаны упрощающие решение предположения	10
Записан второй закон Ньютона в системе отсчета, связанной с центром масс тел	5
Показано, что период T обратно пропорционален корню из суммы масс тел	10

Задание 2. Имперский крейсер (25 баллов)

Сегодня существует огромное количество игрушек с “вечным двигателем”. Одна из них – “Настольный Имперский звездный крейсер”. Он закреплен на продольном держателе так, что может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через точку *O*, выполняя фигуру высшего пилотажа под названием

“бочка”. Внутри крейсер разделен на 3 отсека, как показано на рисунке справа. Средний отсек изолирован от остальных, а верхний и нижний соединены трубкой. В нижний отсек налито “топливо” – немного летучей жидкости (эфира). Раскрашен крейсер в черный и белый цвета, чтобы устрашать врагов и пробуждать ликование в душах союзников. Если игрушку поставить на солнце, крейсер станет выполнять маневры: переворачиваться вверх-вниз без всякой видимой причины. Объясните, почему это происходит. Откуда он берет энергию для своего вращения?



Решение:

Принцип работы “крейсера” основан на принципе теплового насоса. Пока есть перепад температур между верхним и нижним отсеками - крейсер совершает манёвры. При этом температура нижнего отсека всегда должна быть выше температуры верхнего – этим и объясняется специфический окрас “крейсера”. Чёрная боковая поверхность хорошо поглощает тепло, в то время как светлая – отражает. Это вызывает активное испарение “топлива” в нижнем отсеке и конденсацию его в верхнем, что при перетекании большего количества “топлива” в верхний отсек смещает центр тяжести “крейсера”, переводя его в положение неустойчивого равновесия, – и крейсер совершает очередной “манёвр”. Крейсер не зря повёрнут к солнцу боком – верхний солнечный бок всегда светлый, в то время как нижний – всегда тёмный. Манёвры продолжаются пока светит солнце, т.е. существует тепловой поток от солнца в воздух последовательно через нижний и верхний отсеки.

Критерий	**Баллы**
Рассмотрение поглощения и отражения света	10
Рассмотрение испарения и конденсации	10
Нарушение равновесия из-за смещения центра тяжести	5

Задание 3. Самолётобоязнь (20 баллов)

Замечали ли Вы, что если пригнуться в тот момент, когда слышен шум пролетающего самолёта, то тон звука, который вы слышите, изменится? Как он изменится и почему это происходит?

Решение

Суть явления в интерференции волн – взаимодействие “прямой” звуковой волны от самолёта и отраженной от земли приводит к образованию стоячих волн. При этом волны меньшей длины образуют пучности, в которых слышен максимальный тон этой частоты на меньшем расстоянии от земли, чем более длинные низкочастотные волны. Т.е. чем ближе к земле, тем более высокочастотный звук мы слышим как преобладающий. Как следствие при нагибании к земле мы наблюдаем повышение слышимой частоты гула самолёта.

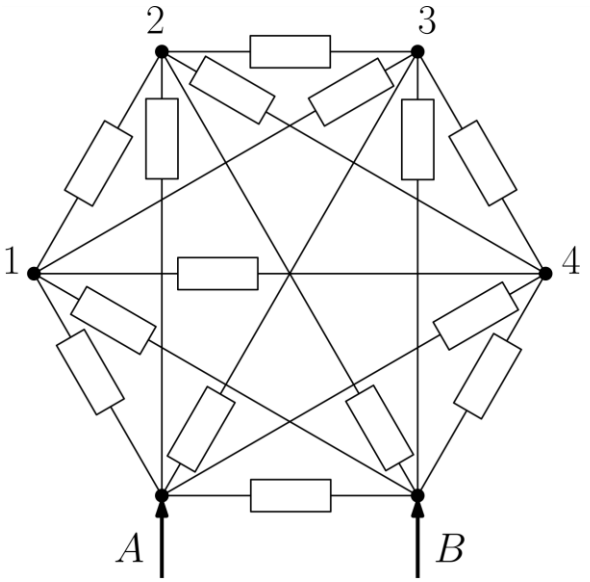
Критерий	**Баллы**
Рассмотрение интерференции звуковых волн	5
Возникновение стоячих волн	10
Зависимость резонирующей частоты от расстояния до земли	10

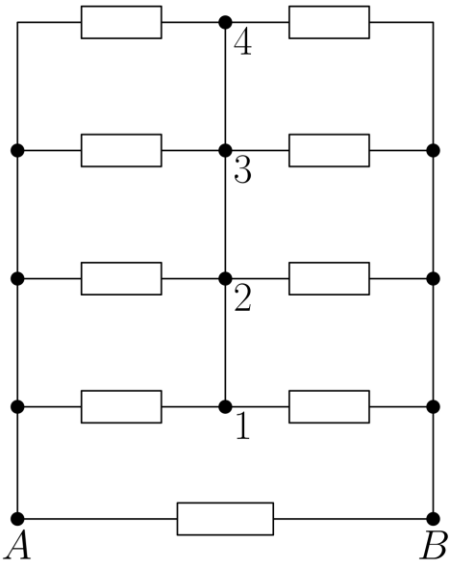
Задание 4: Резистивная сота (25 баллов)

В доску в вершинах правильного шестиугольника вбиты шесть гвоздей. Все гвозди попарно соединены резисторами с сопротивлением *R*. Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

Решение

На рисунке представлена схема соединения, сопротивление каждого из резисторов *R*. Искомое сопротивление — сопротивление между точками *A* и *B*. Для решения задачи используем симметрию схемы.





Точки *A* и *B* непосредственно подсоединяются к источнику напряжения. Покажем, что потенциал точек 1, 2, 3, 4 одинаковы. Действительно, каждая из остальных вершин присоединена через резистор *R* к точкам *A* и *B*, а также ко всем оставшимся точкам, то есть точки 1–4 находятся в равных условиях относительно *A* и *B.* Следовательно, через резисторы, соединяющие точки 1, 2, 3, 4 ток течь не будет. Эквивалентная схема с учётом симметрии соединения приведена на рисунке.

В эквивалентной схеме также возможно удалить соединения точек 1, 2, 3, 4 вследствие равенства их потенциалов. В таком случае имеем параллельное соединение четырёх ветвей сопротивлением 2*R* и одной ветви сопротивлением R. Общее сопротивление этой схемы

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{4}{2R}+\frac{1}{R}} = \frac{R}{3}.$$

Ответ: сопротивление между двумя соседними гвоздями равно R/3.

Критерий	Баллы
Составлена схема соединения	5
Рассмотрена симметрии соединения	10
Составлена эквивалентная схема	5
Найдено общее сопротивление схемы	5

Физика 10 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Невидимые звёзды (25 баллов)

Известный британский астроном конца 18 века, проводивший также исследования в области оптики и гравитации, сделал предположение, что во Вселенной может существовать множество звёзд, с размерами в сотни раз превышающими размеры Солнца, которые, тем не менее, не могут быть увидены с больших расстояний. Считая плотность таких звёзд равной средней плотности Солнца, оцените минимальный радиус такой звезды.

Решение

Оценим радиус такой звезды, считая её плотность равной средней плотности вещества Солнца (во времена Мичелла плотности всех звёзд считались равной плотности Солнца). Воспользуемся известной формулой второй космической скорости

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса и R – радиус звезды, и приравняем эту скорость скорости света $v_2 = c$. Тогда минимальный радиус такой звезды

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Поскольку плотность звезды равна солнечной плотности, отношение массы звезды к массе Солнца будет равно отношению их объёмов

$$\frac{M}{M_S} = \frac{V}{V_S} = \frac{R^3}{{R_S}^3},$$

Где M_S V_S, R_S – масса, объём и радиус Солнца; отсюда

$$M = \frac{M_S R^3}{{R_S}^3}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для радиуса звезды, можно выразить отношение радиуса звезды к радиусу Солнца:

$$\frac{R}{R_S} = \sqrt{\frac{c^2 R_S}{2GM_S}} = 485.$$

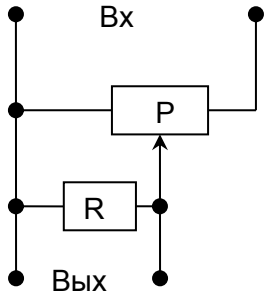
Т.е. минимальный радиус такой звезды составляет 485 радиусов Солнца.

Упомянутый астроном – Джон Мичелл (1724-1793) – известен сейчас как один из первых учёных, предложивших возможность существования чёрных дыр. В 1784 году в журнале Лондонского Королевского общества появилась его статья, в которой высказывалась гипотеза, что свет звезды, чей радиус в 500 раз превышает радиус Солнца, не сможет удалиться от такой звезды на бесконечно большое расстояние, вследствие того, что вторая космическая скорость такого объекта больше скорости света.

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о решающей роли силы гравитации для критерия видимости звезды	10
Записано уравнение для определения радиуса	10
Получен численный ответ	5

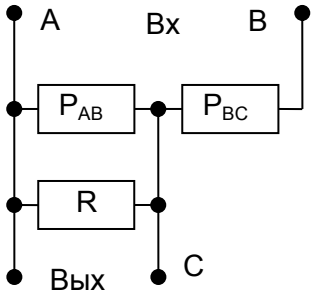
Задание 2. Регулятор громкости (25 баллов)

Найти относительный уровень выходного сигнала *y* (в долях от входного) для схемы с потенциометром от положения его движка x, где $0 \le x \le 1$. Какие значения *R* и *P* необходимо выбрать для получения зависимости наиболее близкой к экспоненциальной $y \sim \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$? Подобные схемы часто используются для “естественного” регулирования уровня звука. Для простоты удобно принять $R_{\text{Вых}}(x=0) = 0$ *Ом*.



Решение:

Представим схему как смешанное соединение резисторов (см. рис.).



Тогда с учётом, что $R_{Вых}\big|_{x=0} = 0$ и при этом R>0 получаем, что $P_{AB}\big|_{x=0} = 0$. Тогда:

$$R_{AB} = \frac{R \cdot P_{AB}}{R + P_{AB}},\ R_{BC} = P_{BC} = P_{AC} \cdot (1-x),$$

$$P_{AB} = P_{AC} \cdot x \Rightarrow x = \frac{P_{AB}}{P_{AC}}.$$

Пусть $y = \frac{U_{Вых}}{U_{Вх}} = \frac{R_{AC} \cdot I}{R_{AB} \cdot I} = \frac{R_{AC}}{R_{AB}}$, тогда:

$$y = \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC}} = \frac{1}{1 + \frac{R_{BC}}{R_{AB}}} = \frac{1}{1 + \frac{P_{BC} \cdot (R + P_{AB})}{R \cdot P_{AB}}} = \frac{1}{1 + \frac{(1-x) \cdot (R + P_{AC} \cdot x)}{R \cdot x}} = \frac{R \cdot x}{R \cdot x + (1-x) \cdot (R + P_{AC} \cdot x)},$$

$$y = \frac{R \cdot x}{R + P_{AC} \cdot x - P_{AC} \cdot x^2} = \frac{x}{1 + \frac{P_{AC}}{R} x(1-x)}$$

Если $P_{AC} << R$ то функция линейная:

$$y \cong x$$

Если $P_{AC} >> R$, то функция имеет вид обратной гиперболы, что несколько ближе к $y \sim \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$:

$$y \cong \frac{1}{\frac{P_{AC}}{R}(1-x)} = \frac{R}{P_{AC}} \frac{1}{(1-x)}.$$

Критерий	**Баллы**
Нарисована эквивалентная схема	10
Записаны уравнения для участков цепи до и после точки входа переменного резистора	5
Получен ответ для функции y(x)	5
Проведен анализ функции и получен ответ	5

Задание 3. Посадочные манёвры (20 баллов)

Орбитальная станция Ares-3 со спускаемым модулем подлетает к Марсу по параболической траектории. В момент выхода на круговую орбиту происходит запуск тормозного двигателя, работающего непродолжительное время, после чего завершается выход на орбиту радиуса R_0. Высота орбиты над поверхностью планеты совпадает с высотой точки наибольшего сближения первоначальной траектории. Определить насколько изменилась скорость корабля во время этого манёвра. Масса Марса M_M.

Решение:

Параболическая траектория подразумевает возможность удаления на бесконечно большое расстояние, где полная механическая энергия корабля может быть принята за ноль, тогда в точке максимального сближения закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{M_M m}{R_0} = 0, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{2G\frac{M_M}{R_0}}.$$

Рассмотрим $g_R = G\frac{M_M}{R_0^2}$ -- ускорение свободного падения на орбите радиуса R, тогда $v_0 = \sqrt{2g_R R_0}$.

Найдем v_1 -- первую космическую скорость движения по круговой орбите радиуса R. Она будет характеризоваться центростремительным ускорением $a_n = \frac{v^2}{R_0}$, которое сообщается силой тяготения $F = mg_R$. Следовательно, второй закон Ньютона в проекции на радиус будет записан так: $\frac{mv_1^2}{R_0} = mg_R$.

Следовательно конечная скорость должна составить $v_1 = \sqrt{g_R R_0}$, а изменение скорости $\Delta v = \sqrt{g_R R_0} \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

Критерий	**Баллы**
Правильная запись закона сохранения энергии	10
Найдена первая космическая скорость на орбите планеты	10

Задание 4. Дырявый метеозонд (30 баллов)

Метеозонд наполняют смесью гелия и воздуха в равных молярных пропорциях. Однако в нем оказывается небольшое отверстие, через которое содержимое устремляется наружу. Найдите молекулярный состав пучка, покидающего шарик в начальный момент времени. Считать, что средние энергии молекул зависят только от температуры и воздух состоит из 25% кислорода и 75% азота.

Решение.

Заметим, что количества молекул $\upsilon_{He} : \upsilon_{N_2} : \upsilon_{O_2}$ соотносится как $4:3:1$.

В силу того что, средние энергии зависят только от температуры, мы имеем равенство кинетических энергий

$$\frac{mv_{He}^2}{2} = \frac{mv_{N_2}^2}{2} = \frac{mv_{O_2}^2}{2},$$

откуда получаем, как соотносятся между собой скорости:

$v_{He} : v_{N_2} : v_{O_2}$ как $2.83 : 1.07 : 1$, заметим, что полученное соотношение не зависит от температуры, т.к. газы находятся в тепловом равновесии.

Далее нам необходимо рассмотреть пучок молекул, покидающих метеозонд. Молекулы, которые его покидают, должны иметь скорость, направленную в отверстие (для простоты рассуждений отверстие будем считать точечным).

Рассмотрим любое из направлений скорости. Обозначим полное количество молекул с таким направлением скорости, покинувших метеозонд за достаточно малый, чтобы не учитывать соударения, промежуток времени Δt как N. Заметим, что $N = N_{He} + N_{N_2} + N_{O_2}$, где $N_{He} = \frac{\upsilon_{He}}{V} \cdot v_{He} \cdot \Delta t$ (аналогично для N_2 и O_2), где V – объем метеозонда.

Отсюда получим соотношение между количествами частиц, имеющих выбранное направление скорости $N_{He} : N_{N_2} : N_{O_2}$ как $(\upsilon_{He} \cdot v_{He}) : (\upsilon_{N_2} \cdot v_{N_2}) : (\upsilon_{O_2} \cdot v_{O_2})$, в числах $11.32 : 3.21 : 1$ (заметим, что промежуток времени Δt, введенный ранее, в ответ не входит).

В силу хаотичности движения молекул в газе, все направления скорости равновероятны, а следовательно равнозаполнены частицами, поэтому полученное соотношение распространяется и на другие направления скорости. Распространение же на случай неточечного отверстия еще более тривиально: любое отверстие конечных размеров может быть рассмотрено как совокупность точечных, поскольку для каждого точечного отверстия искомое соотношение установлено, то оно же сохранится и для отверстия конечного размера.

Итоговый ответ: $11.32 : 3.21 : 1$.

Критерий	**Баллы**
Найдено соотношение между скоростями	10
Найдено соотношение между количествами частиц, имеющих одну и ту же скорость	10
Полученный ответ обоснованно распространен на все возможные направления скорости	10

Физика 10 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Орбитальный зонд (30 баллов)

Космический корабль подходит к неисследованной планете по параболической траектории. В момент максимального сближения кратковременно включается тормозной двигатель, и корабль выходит на круговую орбиту, высота которой над поверхностью планеты совпадает с высотой точки наибольшего сближения первоначальной траектории. Определить какую часть массы корабля должно составлять топливо, если известно, что масса планеты *M,* масса корабля *m*, радиус орбиты *R*.

Решение:

Параболическая траектория подразумевает возможность удаления на бесконечно большое расстояние, где полная механическая энергия корабля может быть принята за ноль, тогда в точке максимального сближения закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}.$$

Рассмотрим $g_R = G\frac{M}{R^2}$ -- ускорение свободного падения на орбите радиуса R, тогда $v_0 = \sqrt{2g_R R}$.

Найдем v_1 -- первую космическую скорость движения по круговой орбите радиуса R. Она будет характеризоваться центростремительным ускорением $a_n = \frac{v^2}{R}$, которое сообщается силой тяготения $F = mg_R$. Следовательно, второй закон Ньютона в проекции на радиус будет записан так: $\frac{mv_1^2}{R} = mg_R$.

Следовательно, конечная скорость должна составить $v_1 = \sqrt{g_R R}$, а изменение скорости

$$\Delta v = \sqrt{g_R R}\cdot(\sqrt{2}-1).$$

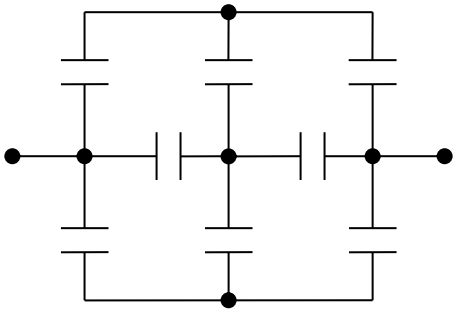
Оценим изменение массы корабля из закона сохранения импульса

$$(m-\Delta m)\Delta v = \Delta m v_0,\ \Delta m = \frac{\Delta v}{v_0+\Delta v}m.$$

Критерий	Баллы
Закон сохранения энергии	10
Выражение для первой космической скорости на орбите планеты	10
Выражение для изменения массы	10

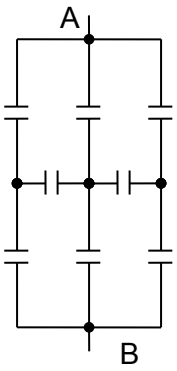
Задание 2. Емкостный коллапс (20 баллов)

Определить общую ёмкость электрической цепи из одинаковых конденсаторов, изображённой на рисунке. Ёмкость одного элемента считать равной *C*.



Решение

Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг-другу, конденсаторы не будут заряжаться, а поэтому их вклад в суммарную емкость отсутствует. В результате ответом является суммарная емкость трёх параллельных ветвей конденсаторов по два последовательно расположенных конденсатора в каждой.



Емкость каждой ветки:

$$C_B = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}.$$

Суммарная емкость:

$$C_{AB} = 3C_B = \frac{3C}{2}.$$

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / нарисована эквивалентная схема	10
Сделан вывод о том, что средние конденсаторы не вносят вклад в суммарную емкость	5
Получена суммарная емкость	5

Задание 3. “Колыбель Ньютона” (20 баллов)

Настольная антистресс-инсталляция, известная как “Колыбель Ньютона” часто встречается в кабинетах физики. Ее используют для демонстрации законов сохранения энергии и импульса. Однако в реальных физических системах потерь энергии избежать нельзя, и колебания рано или поздно затухают. Известно, что, если крайний шарик отклонить от положения равновесия на угол α, то шарик с противоположного конца колыбели поднимется на угол β. На какой угол отклонится первый шар после *n*-го цикла соударений, если считать, что при каждом соударении в тепло переходит одна и та же доля потенциальной энергии деформации?

Решение

Закон сохранения энергии для крайних верхних положений двух последовательных актов соударений будет выглядеть следующим образом: $mgh_1 = mgh_2 - Q_1$, где h_1 и h_2 две высоты подъема шарика, а Q_1 -- тепло, которое выделяется в результате неупругого соударения.

Нам известно, что в каждом цикле соударений $Q_i = \eta mgh_i$, а

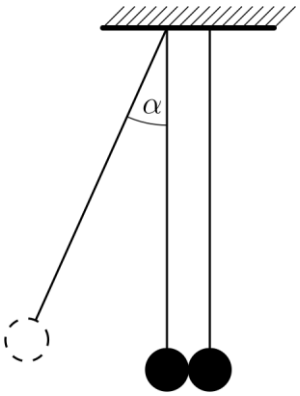
$$\eta = \frac{mgh_i - mgh_{i+1}}{mgh_1} = \frac{h_i - h_{i+1}}{h_i},$$

сохранятся от цикла к циклу, то есть

$$\eta = \frac{h_1 - h_2}{h_1}.$$

Отсюда мы можем найти максимальную потенциальную энергию после i-го соударения: $mgh_{i+1} = (1-\eta)^i mgh_1$, соответственно высота подъема составит

$$h_{i+1} = (1-\eta)^i h_1 = \left(1 - \frac{h_1 - h_2}{h_1}\right)^i h_1 .$$



Заметим, что в тексте задачи задан вопрос про высоту подъема 1го шарика после n-го цикла соударений, значит, в дальнейших выкладках необходимо принять $i = 2n$.

Теперь выразим высоты подъема через соответствующие углы. Обозначим длину подвеса как L, тогда $h_1 = (1-\cos\alpha)L$, $h_2 = (1-\cos\beta)L$ и $h_i = (1-\cos\gamma)L$, подставим в полученное ранее соотношение:

$$(1-\cos\gamma)L = \left(1 - \frac{(1-\cos\alpha)L - (1-\cos\gamma)L}{(1-\cos\alpha)L}\right)^{2n} (1-\cos\alpha)L .$$

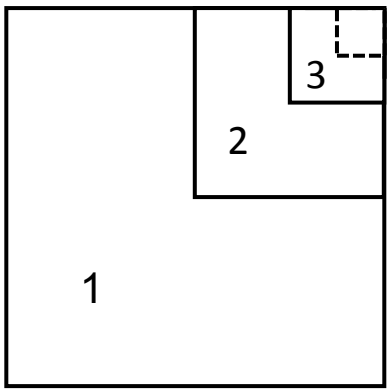
После преобразований:

$$\cos\gamma = 1 - \left(1 - \frac{(1-\cos\alpha) - (1-\cos\gamma)}{(1-\cos\alpha)}\right)^{2n} (1-\cos\alpha) .$$

Критерий	**Баллы**
Запись закона сохранения энергии	5
Выражение для η	5
Выражение для h_i	5
учтено количество соударений и записан ответ	5

Задание 4. Новый русский процессор (30 баллов)

В НИИ им. Скулкова разработали новый микропроцессор. Он представляет квадратный чип со стороной 2 *см*, который разделен на 13 рабочих секторов по следующему правилу: каждый новый сектор представляет собой квадрат со вдвое меньшей стороной, отделенный от предыдущего разметкой, как на рисунке справа. Как только в процессе работы на испытательном стенде сектора с нечетными номерами нагрелись до температуры T_1 = 50°*C*, а с четными – до T_2 = 90°*C*, испытания остановили. Определите установившуюся после остановки испытаний температуру кристалла. Толщина изобретения всего 3 *мм*, удельная теплоемкость материала кристалла 760 *Дж*/(*кг·К*), а плотность 2.3 *г*/*см*^{3}. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.



Решение:

Данных в задаче достаточно для того, чтобы найти объёмы и массы всех секторов, после чего написать уравнение теплового баланса и получить ответ. Однако, этого можно и не делать, увидев определённые закономерности в условии задачи.

Дело в том, что каждый следующий сектор имеет объём, а, значит, и массу, ровно в четыре раза меньшую, чем предыдущий. Например, если обозначить массу первого сектора m, то масса второго сектора равняется *m*/4. Разобьём теперь сектора на пары: 1-й со 2-м, 3-й с 4-м и т.д. В каждой паре больший сектор имеет температуру T_1=50°C, а меньший - T_2=90°C, причем их массы отличаются в 4

раза. Установившаяся температура будет одна и та же в каждой паре, следовательно, это и будет температура, установившаяся в кристалле.

Запишем уравнение теплового баланса для каждой пары:

$$cm(T - T_1) + c\frac{m}{4}(T - T_2) = 0, \quad (1)$$

где T – температура, установившаяся в паре после остановки испытаний, c – удельная теплоемкость кристалла. После сокращения общего множителя c·m, из (1) выразим T:

$$T = \frac{T_2 + 4T_1}{5} = 58°C. \quad (2)$$

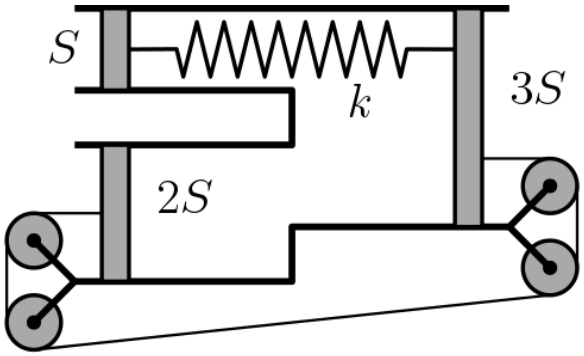
До сих пор мы никак не учитывали теплоту, заключенную в 13-м секторе, ведь пары у него нет. Масса этого сектора составляет всего лишь 10^{-12} от общей массы кристалла, а температура имеет тот же порядок, что и установившаяся в каждой паре. Значит, учет теплоты этого сектора не приведет к сколь-нибудь видимому изменению равновесной температуры, и им можно пренебречь.

Критерий	**Баллы**
Простой вариант	
Догадка о принципе попарного разбиения	10
Уравнение попарного теплового баланса	10
Пренебрежение теплотой 13-го сектора	5
Длинный вариант	
Уравнение теплового баланса	10
Связь площади сектора с его тепловой энергией	5
Обоснованное пренебрежение секторами малой площади	5
Получение численного ответа	5

Физика 11 класс

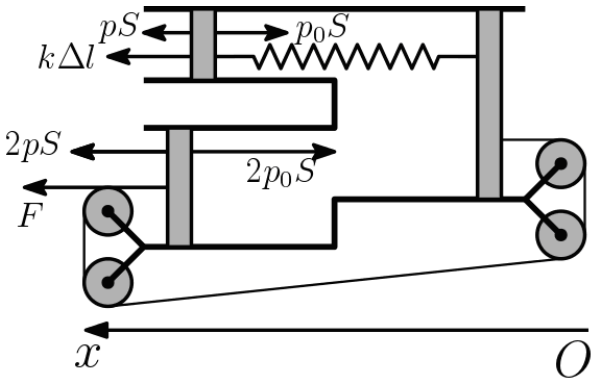
Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

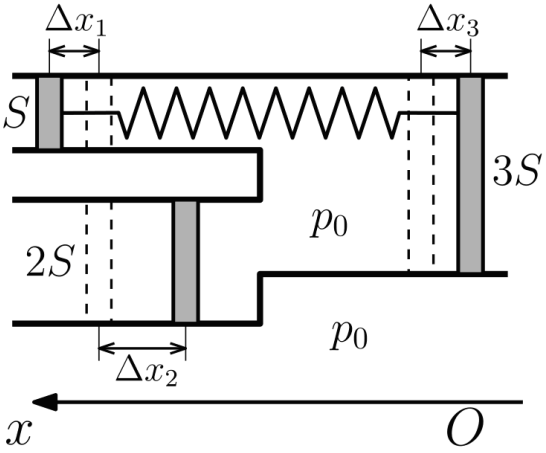
Задание 1: Тепловая машина (30 баллов)



На рисунке изображена система, состоящая из трубы сложной формы, выходы из которой закупорены тремя поршнями с площадями 3*S*, 2*S* и *S*. Внутри трубы находятся *v* молей идеального газа. Правый поршень соединен с верхним левым пружиной с жесткостью *k*, а с нижним – тонкой нерастяжимой нитью через систему блоков, как показано на рисунке. Снаружи системы находится воздух при нормальных условиях, давление p_0, температура T_0. В начальный момент времени система находится в равновесии, нить имеет натяжение *F*. Насколько сдвинется каждый из поршней, если перерезать нить? Считать, что прошло достаточно времени, чтобы система пришла в равновесие. Температура газа постоянна и равна T_0, массами газа, пружины и нити пренебречь.

Решение:





Рассмотрим начальное состояние системы до перерезания нити. Введем ось *Ox*, как показано на рисунке, все величины будем проектировать на эту ось. Найдем, под каким давлением *P* находится газ в трубе и какова деформация пружины Δl. Для этого запишем второй закон Ньютона для поршней *S* и *2S* (все силы, действующие на них, указаны на рисунке). Очевидно, что пружина в исходном состоянии сжата, ибо атмосферное давление больше, чем давление внутри трубы:

$$k\Delta l + pS - p_0S = 0,\ F + 2pS - 2p_0S = 0$$

Из этой системы уравнений сразу находим, что: $p = -p_0 + F/2S$, $\Delta l = -F/2k$.

Пусть теперь нить перерезали. Искомые смещения поршней *S, 2S* и *3S* обозначим через Δx_1, Δx_2 и Δx_3 соответственно. В задаче три неизвестных, следовательно, нужно выписать три уравнения.

Первое уравнение дает пружинка. Заметим, что в конечном состоянии давление газа в трубе сравнивается с атмосферным. После того как все установится, на поршень *2S* будут действовать только атмосфера и газ в трубе, а значит, их давления совпадают. Используя этот факт, можно сделать вывод, что в конечном состоянии пружина уже не деформирована. Для этого достаточно посмотреть на поршень *S*. Силы давлений атмосферы и газа на него скомпенсированы, а значит сила Гука обращается в ноль и пружина не сжата. Таким образом, расстояние между поршнями *S* и *3S* увеличилось на Δl. Это и дает первое уравнение: $-\Delta x_1 + \Delta x_3 = \Delta l$.

Второе уравнение вытекает из закона сохранения импульса. На систему не действует никаких внешних сил, а значит, центр масс системы не сдвигается. Массой газа можно пренебречь по сравнению с массой поршней, поэтому его перемещение не изменяет центр масс системы. В итоге для смещения поршней

получаем уравнение: $\Delta x_1 m + \Delta x_2 m + \Delta x_3 m = 0$, где m – масса поршня (все поршни имеют одинаковую массу). В итоге получаем уравнение: $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$.

Последнее уравнение дается термодинамикой. Система поддерживается при постоянной температуре T_0, значит процесс изотермический. Газ в трубе идеальный, следовательно, для него выполняется уравнение Клапейрона-Менделеева. Найдем начальный объем газа V_0. До перерезания нити его давление было p, по уравнению состояния идеального газа имеем: $pV_0=\nu RT_0$. Откуда получаем, что $V_0=\nu RT_0/p$. При изотермическом процессе произведение объема идеального газа на его давление остается постоянным. Пусть ΔV – изменение объема газа.

Вспоминая, что в конечном состоянии давление газа совпадает с атмосферным, имеем

$$pV_0=p(V_0+\Delta V)=\nu RT_0.$$

Осталось связать изменение объема газа ΔV со смещениями поршней. Ясно, что смещение левых поршней налево приводит к увеличению объема, а смещение правого поршня влево приводит к его уменьшению (при нашем выборе оси), следовательно, $\Delta V = S(\Delta x_1+2\Delta x_2-3\Delta x_3)$. В итоге имеем следующее уравнение:

$$\frac{\nu RT_0}{p_0} = \frac{\nu RT_0}{p_0} + S\left(\Delta x_1 + 2\Delta x_2 - 3\Delta x_3\right).$$

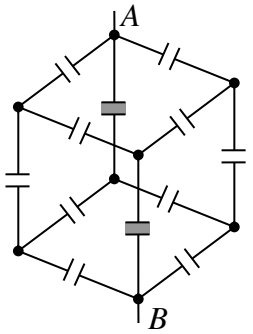
Для получения ответа необходимо решить систему из трех уравнений. В итоге имеем:

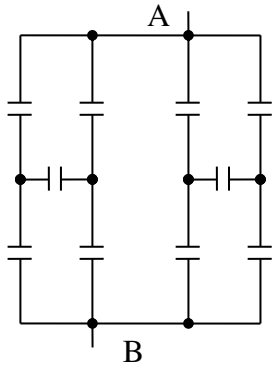
$$\Delta x_1 = -\frac{5F}{12k} - D,\ \Delta x_2 = -\frac{F}{3k} + 2D,\ \Delta x_3 = \frac{F}{12k} - D, \text{ где } D = \frac{\nu RT_0 F}{6p_0 S\left(2p_0 S - F\right)}.$$

Критерий	**Баллы**
Вывод о том, что после перерезания нити давление внутри будет равно атмосферному	5
Составление уравнения для смещений поршней с использованием деформации пружины	5
Составление уравнения для смещений поршней через смещение центра масс	5
Составления уравнения для смещения поршней через уравнения для изотермического процесса	5
Получение итогового ответа	10

Задание 2: Конденсатор в кубе (20 баллов)

В процессе производства нового устройства из одинаковых конденсаторов два конденсатора “пробило”, т.е. в диэлектрике появился проводящий мостик. Определите общую ёмкость между точками *A* и *B* новой цепи с пробитыми конденсаторами. Ёмкость одного элемента считать равной *C*. “Прибитые” диэлектрики обозначены серым цветом.





Решение:

Для решения данной задачи нарисуем эквивалентную схему.

Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг-другу, горизонтально расположенные конденсаторы не будут заряжаться, а поэтому их вклад в суммарную емкость отсутствует. В результате ответом является суммарная емкость четырёх параллельных ветвей конденсаторов по два последовательно расположенных конденсатора в каждой. Емкость каждой ветки:

$$C_B = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}.$$

Суммарная емкость:

$$C_{AB} = 4C_B = \frac{4C}{2} = 2C.$$

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / нарисована эквивалентная схема	10
Сделан вывод о том, что средние конденсаторы не дают вклада в суммарную емкость	5
Получен ответ	5

Задание 3: Горячий светодиод (20 баллов)

В большинстве современных светодиодов в целях экономии используется кристалл синего спектра свечения, на который сверху для получения нужного “цвета светодиода” (белого, красного, жёлтого и т.п.) наносится специальный люминофор. Пусть такой кристалл излучает в секунду 1×10^{18} фотонов с длиной волны 435 нм. При этом люминофор, нанесённый сверху, испускает по 5×10^{17} фотонов/сек с длинами волн 600 и 555 нм, создавая “оранжевое” свечение. Найти максимальную мощность теплоотвода, требуемого для охлаждения данного типа люминофора и его К.П.Д. Считать, что люминофор обеспечивает полное поглощение первичного излучения.

Решение:

Согласно формуле Планка энергия одного кванта света

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тогда за секунду кристалл излучает энергию (мощность поглощения люминофора)

$$P_{Вх} = P_C = N_C \frac{hc}{\lambda_C} = 10^{18} \cdot \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 8 \cdot 10^8}{4.35 \cdot 10^{-7}} \cong 0.41 \tfrac{Дж}{с} = 0.41 Вт.$$

На выходе люминовора

$$P_{Вых} = hc\left(\frac{N_K}{\lambda_K} + \frac{N_З}{\lambda_З}\right) = 6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 8 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{17}\left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-7}} + \frac{1}{5.55 \cdot 10^{-7}}\right) \cong 0.31 Вт.$$

Тогда при условии, что вся тепловая мощность $P_{Вх}$ поглощается, и при этом излучается мощность $P_{Вых}$, получаем, что максимальные потери энергии на нагрев:

$$Q = P_{Вх} - P_{Вых} \cong 0.1 Вт.$$

КПД очевидно:

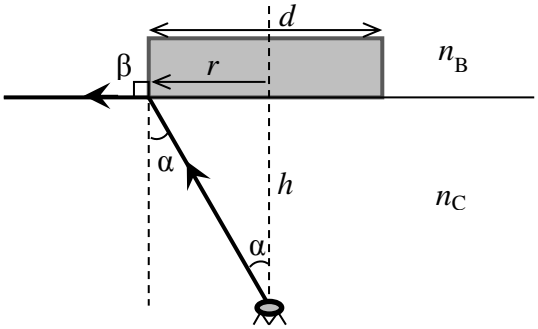
$$\eta = \frac{P_{Вых}}{P_{Вх}} \cong 0.754 \text{ или } 75\%.$$

Критерий	**Баллы**
Определение энергии кванта света	**5**
Формула для Q	**5**
Формула для КПД	**5**
Получен численный ответ	**5**

Задание 4: Невидимый жучок (30 баллов)

На дне прозрачного пруда лежит толстый лист стекла, толщиной h (показатели преломления n_B и n_C соответственно). На листе лежит монета диаметром d. Сможет ли жучок заползти под стекло так, чтобы его не было видно ни одной рыбе, плавающей в пруду? Куда ему необходимо двигаться, чтобы «уменьшить» свою видимость? Жучка считать очень маленьким и свободно ползающим под стеклом.

Решение



Задача на закон полного внутреннего отражения. Полезно знать, что для выполнения условия полного внутреннего отражения (и как следствие создания возможности жучку остаться незамеченным) должно выполняться условие $n_B < n_C$.

Единственный вариант остаться незамеченным – это двигаться под центр монеты. В этом случае лучи, исходящие от жучка, будут выходить из под края монеты, только если угол их падения α на границу раздела стекло-вода будет меньше предельного, показанного на рисунке.

Если

$$\alpha = \alpha_{пр}, \text{ то } \beta = 90°. \qquad (1)$$

Запишем закон преломления для границы раздела стекло-вода:

$$\sin\alpha \cdot n_C = \sin\beta \cdot n_B,$$

Тогда для всех лучей, которые не смогут выйти из под стекла в месте за границей монеты:

$$\sin\alpha > \frac{n_B}{n_C},$$

С другой стороны

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}},$$

Тогда получаем неравенство:

$$\frac{r^2}{r^2+h^2} > \left(\frac{n_B}{n_C}\right)^2,$$

или

$$\frac{2h}{d} < \sqrt{\left(\frac{n_C}{n_B}\right)^2 - 1}.$$

Если показатели преломления стекла и воды будут равны, то ни при каких условиях полная невидимость жучка невозможна. Т.к. нас интересуют вещественные значения r и h, то должно выполняться условие $n_B < n_C$, что при реальных значениях $n_B = 1.33(3)$ и $n_C = 1.5$ выполняется. В остальном видно, что стекло не должно быть толще, чем определённое значение, зависящее от диаметра монеты, т.е. чем больше монета, тем толще может быть стекло.

Критерий	**Баллы**
Определение места возможной «невидимости»	5
Закон преломления на границе стекло-вода и предельный угол (1)	5
Условие для невыхода лучей из под стекла (неравенство)	5
Условие на соотношение показателей преломления	5
Соотношение между h и d	10

Физика 11 класс

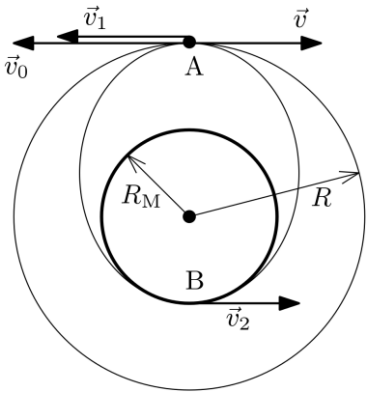
Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1: Марсоход (25 баллов)

Исследовательская станция вышла на круговую орбиту Марса радиусом *R*. С какой скоростью нужно выбросить спускаемый модуль с марсоходом по касательной к траектории станции, чтобы он совершил посадку с противоположной стороны планеты от текущего положения станции, затратив на это минимальное время? Определите это время. Радиус Марса R_M, ускорение свободного падения 0,378 g. Условием посадки на поверхность считать только касание зондом поверхности Марса, скорость относительно поверхности планеты в точке касания погасится за счет трения.

Решение

Спускаемый модуль, выброшенный со станции, должен двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Марса. Большая ось этой орбиты равна $R+R_M$, где R и R_M радиус орбиты станции и радиус Марса соответственно.



Потенциальная энергия в точках А и В (афелии и перигелии этой орбиты соответственно) может быть записана следующим образом:

$$W_A=-G\frac{M_M m}{R},\ W_B=-G\frac{M_M m}{R_M},$$

где M_M и m массы Марса и спускаемого модуля соответственно.

Закон сохранения энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{m{v_A}^2}{2}-G\frac{M_M m}{R}=\frac{m{v_B}^2}{2}-G\frac{M_M m}{R_M},$$

где v_A и v_B скорости в точках А и В соответственно. Учитывая, что $G\frac{M_M}{R_M^2}=g_M$, получаем:

$$\frac{v_A^2}{2}-g_M\frac{R_M^2}{R}=\frac{v_A^2}{2}-g_M R_M.$$

В то же время, согласно второму закону Кеплера радиус вектор заметает равные площади за одинаковые промежутки времени:

$$\frac{v_A\cdot\Delta t\cdot R}{2}=\frac{v_B\cdot\Delta t\cdot R_M}{2}\ \text{или}\ v_A R=v_B R_M.$$

Отсюда находим

$$v_A=R_M\sqrt{\frac{2g_M R_M}{R(R_M+R)}}.$$

Теперь найдем v_0 – скорость станции на круговой орбите:

$$G\frac{M_M m_C}{R^2}=\frac{m_c{v_0}^2}{R},\ v_0=\sqrt{\frac{GM_M}{R}}=\sqrt{\frac{g_M R_M}{2}}.$$

Итого, спускаемый модуль нужно выбросить назад со скоростью

$$v=v_0-v_A=\sqrt{\frac{g_M R_M}{2}}-R_M\sqrt{\frac{2g_M R_M}{R(R_M+R)}}.$$

Время спуска оценим из третьего закона Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Обозначим период обращения тела по круговой орбите как T_0, искомый период как T, тогда:

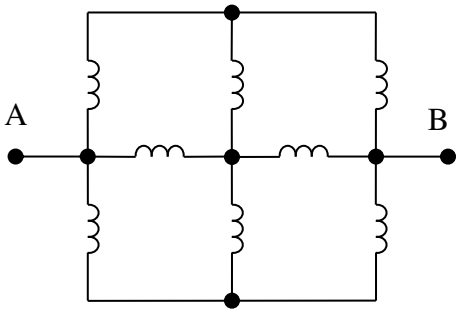
$$T_0=\frac{2\pi R}{v_0},\quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^2=\left(\frac{R+R_M}{2R_M}\right)^3,\quad T=\frac{2\pi R}{v_0}\left(\frac{R+R_M}{2R_M}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Соответственно, искомое время составляет $T/2$.

Критерий	Баллы
Получено соотношение между скоростями станции и спускаемого модуля	10
Определена скорость станции на орбите	10
Найдено время падения спутника	10

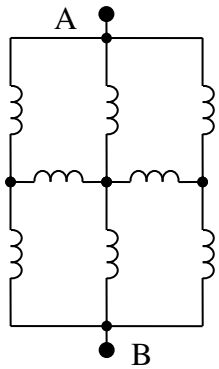
Задание 2: Всюду поле (20 баллов)

Определить общую индуктивность L_{AB} электрической цепи из одинаковых катушек, изображённой на рисунке. Индуктивность одного элемента считать равной L.



Решение:

Для решения данной задачи нарисуем эквивалентную схему. Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг другу, то индуктивности, соединяющие эти точки, не будут участвовать в протекании тока, а поэтому их вклад в суммарную индуктивность отсутствует. В результате ответом является суммарная индуктивность трёх параллельных ветвей индуктивностей по два последовательно расположенных индуктивности в каждой.



Индуктивность каждой ветки: $L=L+L=2L$.

Суммарная индуктивность: $\frac{1}{L_{AB}} = 3 \cdot \frac{1}{2L}$ и соответственно $L_{AB} = \frac{2L}{3}$.

Критерий	Баллы
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / составлена эквивалентная схема	**10**
Сделан вывод о том, что средние индуктивности не вносят вклад в суммарную величину	**5**
Получен численный ответ	**5**

Задание 3: Волшебный камень (20 баллов)

Согласно легендам у викингов был волшебный “солнечный камень”, который помогал найти солнце в облачную погоду, либо даже когда его не было на горизонте, что актуально в северных широтах. Как известно на севере солнце может даже в полдень не показаться над горизонтом.

Сегодня известны природные минералы, которые меняют свой цвет на основе явления дихроизма: в при повороте плоскости поляризации падающего света на 90° они могут менять свой оттенок, например, со слегка желтоватого на тёмно-синий. Можно ли (и если да, то как) использовать такой камень для “нахождения” солнца?

Решение:

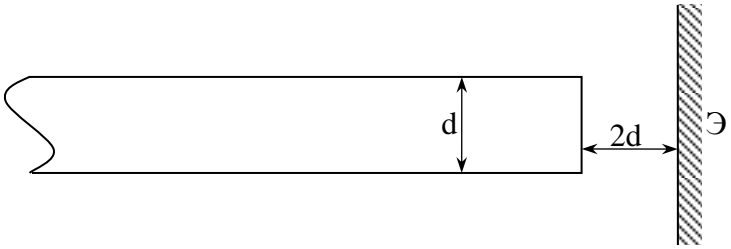
Поляризация солнечного света обусловлена теми же явлениями, что и синий цвет неба (неполяризованный падающий свет возбуждает атомы газов в воздухе).

При этом свет с вертикальной поляризацией максимально излучается в горизонтальном направлении, в то время как свет с горизонтальной – распространяется в вертикальном. Когда солнце находится за горизонтом, например, на западе – мы “видим” горизонтальную поляризацию в плоскости, расположенной на линии север-юг. Следовательно, “проградуировав” камень, мы можем по цвету проходящего сквозь него света определять положение солнца даже в облачную погоду, направляя его на ясный участок неба.

Критерий	**Баллы**
Рассмотрение поляризации “отраженного” света	5
Определение верных связей плоскостей поляризации с положением солнца	10
Предположение об использовании камня	10

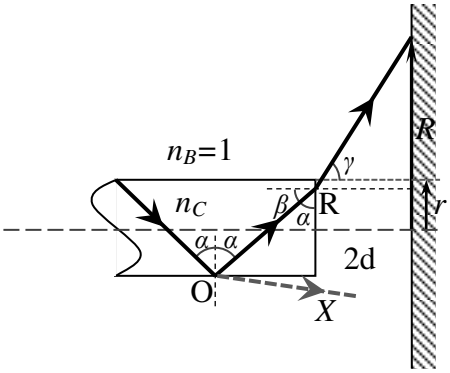
Задание 4: Волноводный зайчик (30 баллов)

Рассчитайте максимально возможный размер яркого светового пятна на экране, расположенном на расстоянии 2*d* от цилиндрического длинного неизолированного стеклянного световода диаметром *d*. Показатель преломления стекла n_C.



Решение

Главным предположением возможности распространения света по волноводу должно стать наличие полного внутреннего отражения для луча света, способного двигаться «вдоль» волновода постоянно переотражаясь от его стенок. Для этого угол падения света на стенку α должен быть больше предельного.



При рассмотрении всех возможных лучей, падающих на торцевую стенку волновода перед выходом из него, убеждаемся в том, что максимальный радиус пятна даст луч, падающий на торцевую границу в самой близи от боковой границы и при этом ранее переотражённый от противоположной боковой границы. Например, такой, как показан на рисунке. Любые лучи, которые могли бы выйти не через торец, а через боковую стенку не рассматриваем, т.к. они по волноводу не распространяются, а покидают его (например, направление X). При этом помним, что т.к. $n_C > n_B$, то угол преломления будет больше угла падения γ > β, что в том числе и даёт максимальный размер пятна.

Запишем закон полного внутреннего отражения для т. O:

$$\sin\alpha > \frac{1}{n_C}, \text{ т.к. } n_B=1.$$

Другое условие является требованием того, чтобы лучи всё же при этом смогли выйти из торца волновода, преломившись в точке R:

$$\sin\beta \cdot n_C < \sin\gamma,$$

Отсюда, учитывая что $\beta = 90° - \alpha$ и $\gamma \leq 90°$ получаем второе условие на углы:

$$\cos\alpha \cdot n_C < 1.$$

В результате:

$$\frac{1}{\sin\alpha} < n_C < \frac{1}{\cos\alpha},$$

Что даёт нам минимально возможный угол, при котором возможен выход света из волновода $\alpha > 45°$. Возводя все части неравенства в квадрат и проделав необходимые преобразования, получаем, что:

$$\frac{1}{n_C^2} < 1 - \sin^2\alpha, \text{ или } \frac{1}{n_C^2} < 1 - \frac{\sin^2\gamma}{n_C^2}.$$

Отсюда

$$\sin^2\gamma < n_C^2 - 1,$$

что даёт для предельного (максимального) угла γ_{max}:

$$\sin^2\gamma_{max} = n_C^2 - 1.$$

С другой стороны из треугольника, образованного точкой R, лучом и экраном:

$$\tan\gamma = \frac{R-r}{2d},$$

или

$$(R-r)^2 = 4d^2\tan^2\gamma = 4d^2\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}.$$

Тогда для предельного угла γ_{max} получаем:

$$(R_{max} - r)^2 = 4d^2\frac{n_C^2-1}{2-n_C^2},$$

или

$$R_{max} = d\left(2\sqrt{\frac{n_C^2-1}{2-n_C^2}} + \frac{1}{2}\right).$$

Видим, что для получения действительных значений R_{max} показатель преломления волновода не должен быть меньше чем $\sqrt{2}$: $n_C \geq \sqrt{2}$, что для стекла с $n_C = 1.5$ выполняется. При $n_C = \sqrt{2}$, $R_{max} \to \infty$, $\gamma_{max} \to 90°$ что для реального стекла невозможно, следовательно, максимальный радиус пятна конечен.

Критерий	**Баллы**
Определение наличия эффекта полного внутреннего отражения	5
Закон преломления на торцевой границе световода	5
Определение луча, дающего пятно наибольшего радиуса	5
Условие на показатель преломления стекла	5
Определение R_{max}	10