8 класс

Вариант 1

Решения

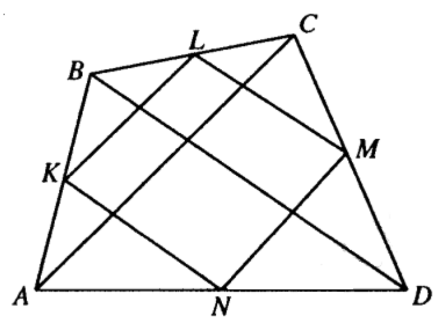
1. *Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $m^2 = n^2 + 2018$?*

   Решение. Из равенства $m^2 = n^2+2018$ вытекает, что m^2 и n^2 — одинаковой четности (либо оба четны, либо оба нечетны). Следовательно, то же можно сказать и о числах m и n. Но в таком случае $2018 = m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$ должно делиться на 4 (т.к. оба сомножителя четны), в то время, как 2018 — не кратно четырем. Следовательно, таких чисел m и n не существует.

   Ответ. Таких чисел не существует

2. *Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий равны p и q. Найдите площадь четырехугольника.*

   Решение. Так как KL, LM, NM и KN — средние линии соответствующих треугольников (см. рисунок), то $KL = NM = \frac{1}{2}AC$, $KN = LM = \frac{1}{2}BD$. По условию $AC = BD$. Следовательно, $KLMN$ — ромб, площадь которого равна $\frac{1}{2}pq$.



   Пусть искомая площадь равна S. Тогда $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$. Но $S_{\triangle AKN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABD}$. Аналогично, $S_{\triangle CML} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$. Поэтому $S_{\triangle AKN}+S_{\triangle CML} = \frac{1}{4}S$. Аналогично получаем, что $S_{\triangle KBL}+S_{\triangle MDN} = \frac{1}{4}S$. Таким образом, площадь вне ромба равна $\frac{1}{2}S$. Отсюда и площадь ромба равна $\frac{1}{2}S$, откуда $S = pq$.

   Ответ. $S = pq$

3. *На конгресс приехало 1000 делегатов из разных стран. Известно, что каждые трое из них могут говорить друг с другом без помощи остальных (однако при этом возможно, Что одному из трех лиц придется служить переводчиком для двух других). Докажите, что всех делегатов конгресса можно так разместить в гостинице с двухместными номерами, что в каждом номере будут помещены делегаты, которые могут говорить друг с другом.*

   Решение. Выберем каких-то трех делегатов конгресса. Среди них найдутся двое, знающих один и тот же язык — их–то мы и поместим в одном двухместном номере гостиницы. Из оставшихся 998 делегатов снова отберем троих, среди которых опять найдутся двое, которых можно будет разместить в одном номере гостиницы — и т.д., пока у нас не останутся всего 4 делегата A, B, C и D. Если каждые два из них могут говорить между собой, то с размещением этих делегатов не будет никаких трудностей. Если же A и B между собой не говорят, то и C, и D могут служить для них переводчиками (что и делает возможным общение в тройках A, B, C и A, B, D делегатов). А это позволяет поместить, скажем, C в один номер с A, а D — в один номер с B.

4. *Найдите все решения уравнения*

$$8^x(3x+1) = 4$$

   и докажите, что других решений нет.

   Решение. Легко заметить, что $x = \frac{1}{3}$ является решением. При $x < -\frac{1}{3}$ левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна, следовательно, корней быть не может. При $x \geq -\frac{1}{3}$ левая часть монотонно возрастает, следовательно, уравнение может иметь только один корень, поэтому других корней нет.

5. *В фирме такси в данный момент свободно 60 машин: 10 черных, 20 желтых и 30 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет не зеленое такси.*

   Решение. Вероятность того, что приедет машина определенного цвета, вычисляется как отношения количества благоприятных исходов (приезд машины нужного цвета) к общему числу исходов (общее число машин). Таким образом, вероятность приезда зеленой машины равна $\dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$.

9 класс

Вариант 1

Решения

1. *Сколько и каких цифр понадобится для того, чтобы записать все натуральные числа от 1 до 10^{2017} включительно?*

   Решение. Рассмотрим сначала все натуральные числа от 1 до $10^{2017} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{2017\,\text{штук}}$.

   При этом все числа, в записи которых участвует меньше 2017 цифр, дополним ведущими нулями, чтобы они стали 2017–значными и добавим еще одно число $\underbrace{00\ldots0}_{2017\,\text{штук}}$.

   У нас получилось 10^2017 2017–значных чисел, для записи которых понадобится $2017 \cdot 10^{2017}$ цифр. При этом здесь каждая из 10 цифр будет использована равное число раз, т.к. они все совершенно равнозначны. Следовательно, каждая цифра будет задействована $2017 \cdot 10^{2016}$ раз.

   Теперь подсчитаем, сколько будет лишних (ведущих) нулей. Однозначных чисел — 9, двузначных — $99-9 = 90$, трехзначных — $999-99 = 900$, и т.д. Т.к. к однозначной цифре мы приписывали слева 2016 нулей, к двузначной — 2015, и т.д., то общее число лишних нулей (не считая первого числа, которое у нас записывалось как $\underbrace{00\ldots0}_{2017\,\text{штук}}$) бедут равно

   $$2016 \cdot 9 + 2015 \cdot 90 + 2014 \cdot 900 + \ldots + 2 \cdot 9 \cdot 10^2014 + 1 \cdot 10^{2015} = \sum_{k=1}^{2016}(2017-k)\cdot 10^{k-1}.$$

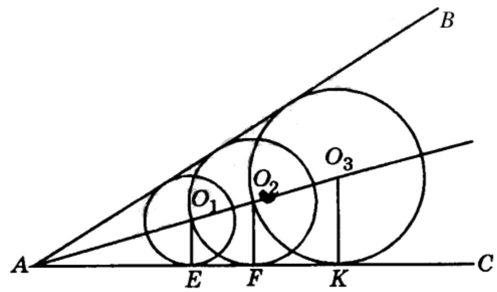
   Припишем теперь 1 слева к числу $\underbrace{00\ldots0}_{2017\,\text{штук}}$. При этому мы получили все целые числа в промежутке от 1 до 10^2017.Мы видим, что для их записи потребовалось $2017 \cdot 10^{2017}$ двоек, троек и т.д. до девяток, $2017 \cdot 10^{2017} + 1$ единица и число нулей, равное

   $$2017 \cdot 10^{2017} - \sum_{k=1}^{2016}(2017-k)\cdot 10^{k-1}.$$

2. *В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой. Определите*

радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен r и расстояние от ее центра до вершины угла равно a.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, о которых говорится в условии задачи, $O_1A = a$, E, F, K — соответственно, точки касания малой, средней и большой окружностей со стороной AC угла. Тогда $O_1E = r$, $O_1E \perp AC$, $O_2F \perp AC$, $O_3K \perp AC$ и $\triangle AO_1E \sim \triangle AO_2F \sim \triangle AO_3K$. Пусть x — радиус средней, а y — радиус



большой окружности. Тогда $O_2O_1 = O_2F = x$, $O_2O_3 = O_3K = y$. Из подобия $\triangle AO_1E$ и $\triangle AO_2F$ следует, что

$$\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_2}{O_2F}; \quad \frac{a}{r} = \frac{a+x}{x}; \quad x = \frac{ar}{a-r}.$$

Из подобия $\triangle AO_1E$ и $\triangle AO_3K$ следует, что

$$\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_3}{O_3K}; \quad \frac{a}{r} = \frac{a+x+y}{y}; \quad y = \frac{r(a+x)}{a-x} = \frac{r\left(a + \dfrac{ar}{a-r}\right)}{a-r} = \frac{a^2r}{(a-r)^2}.$$

Ответ. $\dfrac{ar}{a-r}$; $\quad \dfrac{a^2r}{(a-r)^2}$

3. *Дано n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, таких, что*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1.$$

Докажите, что

$$(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Решение. Заметим, что

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Следовательно,

$$((1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n))^2=(1+a_1)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Так как

$$(1+a_i)\left(1+\frac{1}{a_i}\right)=1+1+a_i+\frac{1}{a_i}\geqslant 2+2=4,$$

то

$$((1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n))^2\geqslant 4^n.$$

А отсюда в силу положительности a_i очевидно получается справедливость доказываемого тождества.

4. *Рассмотрим игру «Морской бой» в квадрате* 5×5 *клеток. Какое наименьшее количество выстрелов надо произвести, чтобы гарантированно ранить корабль размером* 1×4 *клетки?*

Решение. Очевидно, что меньше пяти выстрелов не хватит, так как по крайней мере один выстрел нужно сделать в каждую вертикаль и в каждую горизонталь. Покажем, что пяти выстрелов не хватит. Действительно, выстрел, который сделан в первую вертикаль оставляет четыре подряд идущие клетки на данной горизонтали, значит, в эту горизонталь нужно будет сделать по крайней мере еще один выстрел. В остальные четыре горизонтали тоже нужно сделать хотя бы по одному выстрелу, итого выстрелов не меньше шести. Шести выстрелов гарантированно хватит:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot\\
\cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot\\
* & \cdot & \cdot & \cdot & *\\
\cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot\\
\cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot
\end{array}$$

5. *Пусть* x *— натуральное число. Решите уравнение*

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}\ldots+\frac{1}{x}=3.$$

Решение. Домножим обе части уравнения на x. Получим

$$(x-1)+(x-2)+(x-3)+\ldots+1=3x.$$

Левая часть этого уравнения есть сумма членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=x-1$, $d=-1$, а $a_n=1$. Прогрессия насчитывает $(x-1)$ членов.

Так как $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, то уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x-1+1}{2}\cdot(x-1)=3x \quad\Rightarrow\quad x^2=7x \quad\Rightarrow\quad x=7(x\neq 0).$$

Ответ. $x=7$

10 класс

Вариант 1

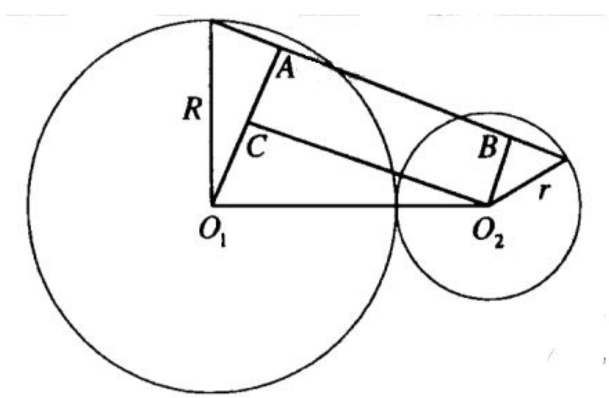
Решения

1. *Доказать, что для любого целого неотрицательного* n *выражение* $3^{6n}-2^{6n}$ *делится на 35.*

   Решение. Действительно, для любых целых неотрицательных m и любых чисел a и b
   $$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$
   В частности, для четных $m = 2k$
   $$a^{2k} - b^{2k} = (a^2-b^2)(a^{2(k-1)} + a^{2(k-2)}b^2 + \ldots + a^2b^{2(k-2)} + b^{2(k-1)}).$$
   А значит, разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований (т.к. на сумму оснований делится a^2-b^2). Тогда $3^{6n}-2^{6n} = 27^{2n}-8^{2n}$ делится на $27+8 = 35$. Что и требовалось доказать.

2. *К двум внешне касающимся окружностям радиусов* R *и* r *построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найдите длины этих отрезков.*

   Решение. Пусть искомая длина равна $2x$. Тогда $AB = 4x$, $AO_1 = \sqrt{R^2-x^2}$, $BO_2 = \sqrt{r^2-x^2}$. Проведем $O_2C||AB$. В $\triangle O_1O_2C$



$$O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} \Rightarrow \sqrt{R^2-x^2} - \sqrt{r^2-x^2} = \sqrt{(R+r)^2-16x^2}. \qquad (1)$$

Умножив обе части равенства (3) на $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}$, получаем

$$R^2-r^2=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}\left(\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}=\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}. \qquad (2)$$

Складывая (3) с (2), получаем

$$2\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}+\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{(R+r)^2-16x^2+R^2-r^2}{\sqrt{(r+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R^2+Rr-8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R(R+r)-8x^2)}{\sqrt{(R=r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{(R+r)^2-16x^2}=R(R+r)-8x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(R^2-x^2)\left((R+r)^2-16x^2\right)=\left(R(R+r)-8x^2\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow R^2(R+r)^2-16R^2x^2-x^2(R+r)^2+16x^4=R^2(R+r)^2-16R(R+r)x^2+64x^4.$$

Так как $x\neq 0$, то приходим к уравнению $48x^2=14Rr-R^2-r^2$, откуда $x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. Искомая же длина составляет $2x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$.

Ответ. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$

3. *Докажите, что*
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Умножим и разделим выражение в левой части доказываемого тождества на $2\cos\frac{\pi}{14}$, что не равно 0. Применим после этого в числителе формулу

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y).$$

Получим

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

4. *На шахматной доске 8×8 клеток расставлено 8 ладей так, что ни одна из них не бьёт другую. Пробегая мимо доски Витя заметил три ладьи стоящие на белых полях. Докажите, что есть еще по крайней мере одна ладья, тоже стоящая на белом поле.*

   Решение. Пронумеруем горизонтали и вертикали числами от 1 до 8 снизу вверх и слева направо. Заметим, что сумма индексов любой черной клетки четна, а любой белой — нечетна. На всех горизонталях и всех вертикалях стоит ровно по одной ладье. Поэтому сумма всех индексов клеток, на которых стоят ладьи должна быть четной (точнее, она равна $8 \cdot 9 = 72$). Если бы на доске стояло только три ладьи на белых клетках, а остальные на черных, это бы означало, что сумма индексов всех клеток, на которых расположились ладьи, оказалась нечетной, что противоречит выше сказанному. Значит, есть еще как минимум одна ладья на белой клетке.

5. *При каких целых отрицательных n функция f, заданная равенством*

$$f(x) = \cos 7x \cdot \sin\frac{25x}{n^2}$$

   является периодической функцией с периодом $T = 7\pi$?

   Решение. По определению периода при любом значении x должно выполняться равенство

$$\cos 7(x + 7\pi) \cdot \sin\frac{25}{n^2}(x + 7\pi) = \cos 7x \cdot \sin\frac{25x}{n^2}. \tag{3}$$

Значит, оно должно выполняться и при $x = 0$. В этом случае приходим к уравенению

$$\cos 49\pi \cdot \sin\frac{175\pi}{n^2} = 0.$$

Учитывая, что $\cos 49\pi \neq 0$ при целых отрицательных n, приходим к выводу, что выполняется равенство

$$\sin \frac{175\pi}{n^2} = 0,$$

что выполняется только при $\dfrac{175}{n^2} = k$, где k — целое число. Заметим, что $175 = 5^2 \cdot 7$, а, следовательно, среди делителей числа 175 есть только два квадрата целых чисел: квадраты чисел 1 и 5. Но нас интересуют только целые отрицательные значения n. Значит, $n \in \{-1, -5\}$.

Подствляя эти значения в уравнение (3), убеждаемся, что в обоих случаях получается тождество.

Ответ. $n = -1, \quad n = -5$

11 класс

Вариант 1

Решения

1. *Петя покрасил все натуральные числа в 2017 разных цветов. Верно ли что независимо от способа покраски можно найти два числа одного цвета, отношение которых целое и делится на 2016?*

   Решение. Рассмотрим натуральные числа 1, 2016, 2016^2, 2016^{2017}. Их всего 2018, а цветов 2017, значит, среди этих чисел есть хотя бы два одного цвета. Отношение этих чисел целое и кратно 2016.

2. *Пусть N — четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20}?*

   Решение. Найдем две последние цифры числа N^{20}. Число N^{20} делится на 4, т.к. N четно. Далее, число N не делится на 5 (иначе оно делилось бы на 10) и, значит, представимо в виде $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$. Но число

$$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20 \cdot (5k)^{19} + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot (5k)^2 \pm 20 \cdot (5k) + 1$$

   дает при делении на 25 остаток 1, а число

$$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20 \cdot (5k)^{19} \cdot 2 + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot (5k)^2 \cdot 2^{18} \pm 20 \cdot (5k) \cdot 2^{19} + 2^{20}$$

   дает при делении на 25 тот же остаток, что и число $2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 = (1025-1)^2$ т.е. тоже остаток 1.

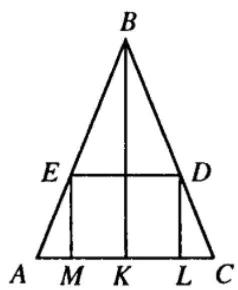
   Из того, что N^{20} при делении на 25 дает остаток 1 следует, что последними двумя цифрами этого числа могут быть лишь 01, 26, 51 или 76. Учитывая, что N^{20} должно делиться на 4, заметим, что последними двумя цифрами могут быть только 76. Значит, цифрой десятков числа N^{20} будет цифра 7.

   Ответ. 7

3. *В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет $\frac{1}{6}$ часть площади треугольника. Определите высоту треугольника и сторону квадрата.*

Решение. Если $MDEL$ — квадрат со стороной x, вписанный в данный $\triangle ABC$ с высотой $h = BK$, $a = AC$, то имеем

$$\triangle AEM \sim \triangle ABK \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{x}{h};$$
$$\triangle EBD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{x}{a}.$$



Таким образом, получаем

$$\frac{x}{h} + \frac{x}{a} = \frac{AE}{AB} + \frac{EB}{AB} = 1 \Rightarrow xa + xh = ah.$$

По условию,

$$ah = 12x^2 \Rightarrow \begin{cases} ah = 12x^2, \\ a + h = 12x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}a, h = (5 \pm 2\sqrt{6})a.$$

Ответ. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6}a, \quad h = (5 \pm 2\sqrt{6})a$

4. *Дана система уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

(а) a_{11}, a_{22}, a_{33} *— положительны;*

(б) все остальные коэффициенты отрицательны;

(в) в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна.

Докажите, что $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *является единственным решением для данной системы.*

Решение. Пусть (x_1, x_2, x_3) — решение системы и пусть без ограничения общности $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$. Если $|x_1| = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Предположим, чт $|x_1 \neq 0|$. Тогда

$$a_{11} + a_{13}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \geqslant a_{11} - |a_{12}|\frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\frac{|x_3|}{|x_1|} \geqslant$$
$$\geqslant a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0.$$

Отсюда и из первого уравнения

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| = |x_1| \left| a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \right| > 0.$$

Полученное противоречие показывает необходимость равенства $|x_1| = 0$, что и требовалось. Это решени легко обобщается на случай n уравнений с n неизвестными.

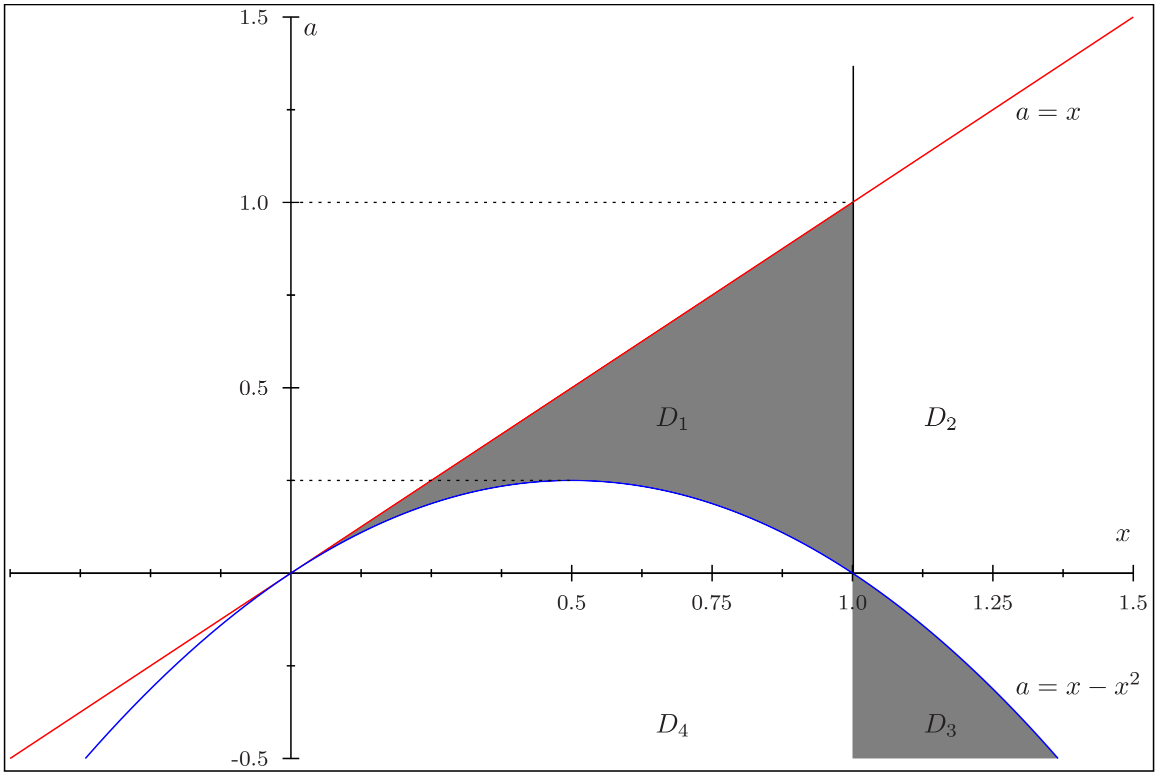
5. *Для всех значений параметра* a *решите неравенство*

$$\log_x (x - a) > 2.$$

Решение. Допустимые значения переменной x определяются системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - a > 0. \end{cases}$$

Этой системе на координатной плоскости xOa соответствует множество точек, лежащих нже прямой $a = x$, правее оси a и не включающее прямую $x = 1$. Построим теперь график функции $a = x - x^2$. Этим графиком часть плоскости, соответствующая области допустимых значений, разбивается на четыре области D_1, D_2, D_3 и D_4 (см. рис.).



В каждой из этих областей произвольно выберем по одной точке, например,

$$M_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right) \in D_1, \quad M_2(2;0) \in D_2, \quad M_3(2;-3) \in D_3 \quad \text{и} \quad M_4\left(\frac{1}{2};-1\right) \in D_4.$$

Подставляя теперь выбранные значения $(x;a)$ в исходное неравенство, получаем соответствующие неравенства:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} > 2, \quad \log_2 2 > 2,$$

$$\log_2 5 > 2 \quad \text{и} \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} > 2.$$

Первое и третье неравенства истинны, а второе и четвертое — ложны. Соответственно, исходное неравенство истинно только в областях D_1 и D_3.

Множество точек на плоскости xOa с фиксированным a образует горизонтальную прямую. Решение же исходного неравенства будут абсциссы тех точек, которые принадлежат пересечениею этой прямой с заштрихованными областями.

А тогда, если x_1 и x_2 — корни уравнения $a = x - x^2$ (опеределяемое формулами $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$), то, изменяязначение a от $-\infty$ до $+\infty$, непосредственно из рисунка выписываем ответ.

Ответ.
$$\begin{array}{ll}
\text{если } a \in (-\infty; 0), & \text{то } x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right); \\
\text{если } a = 0, & \text{то } x \in \emptyset \\
\text{если } a \in \left(0; \frac{1}{4}\right), & \text{то } x \in \left(a; \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \sup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}; 1\right); \\
\text{если } a \in \left(\frac{1}{4}; 1\right), & \text{то } x \in (a; 1); \\
\text{если } a \in [1; +\infty), & \text{то } x \in \emptyset.
\end{array}$$

11 класс

Вариант 2

Решения

1. *Петя покрасил все клетки доски размером 5×5 в два цвета. Докажите, что независимо от способа раскраски Маша может найти прямоугольник из клеток доски, все угловые клетки которого покрашены в один цвет.*

2. *Докажите, что число*
$$1^{2017} + 2^{2017} + \ldots + 2016^{2017}$$
делится на 2017 и не делится на 2018.

   Решение. Обозначим ёто число за S. Прибавим к S такую же сумму чисел записанную в обратном порядке и сгруппируем числа по парам:
$$2S = (1^{2017} + 2016^{2017}) + \ldots + (2016^{2017} + 1^{2017}).$$
   Так как $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n, получим что $2S$ делится на 2017. Поскольку 2 и 2017 взаимно просты, на 2017 делится S.

   Если к сумме добавить следующее слагаемое (2017^{2017}), то аналогичным рассуждением получим, что $2S+2\cdot 2017^{2017}$ делится на 2018, но $2\cdot 2017^{2017}$ очевидно не делится на 2018. Следовательно, $2S$ не делится на 2018, откуда и S не делится на 2018.

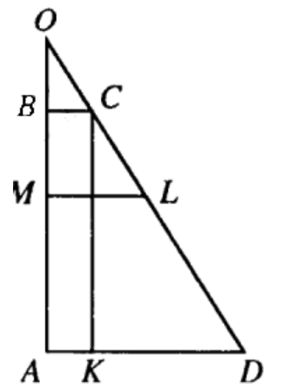
3. *Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.*

   Решение. Рассмотрим данную прямоугольную трапецию $ABCD$, где $c = AB$, $d = CD$, $MN||BC$, и в $MBCL$ и $AMLD$ можно вписать окружности радиусов r_1 и r_2. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O.

   Пусть $BC = x$, $MN = y$, $AD = z$.

   Заметим, что $\triangle MOL \sim \triangle AOD$.

   Тогда $\dfrac{y}{z} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{OM}{OA}$ (в подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей относятся как соответствующие стороны). Далее
$$BM = 2r_1, AM = 2r_2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{OM}{OA} = \frac{OM - BM}{OA - AM}$$



т.е. $\dfrac{y}{z}=\dfrac{OB}{OM}$. Т.к. $\frac{OB}{OM}=\frac{x}{y}$ $(\triangle BOC\sim\triangle MOL)$, то $\dfrac{y}{z}=\dfrac{x}{y}\Rightarrow y^2=xz$.
Имеем $BM+CL=x+y$, $AM+DL=y+z$. Следовательно,

$$c+d=x+2y+z=x+2\sqrt{xz}+z=\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{c+d}.$$

Пусть CK — высота трапеции. Тогда $z-x=KD=\sqrt{d^2-c^2}$, а, значит,

$$\sqrt{z}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{d^2-x^2}}{\sqrt{c+d}}=\sqrt{d-c}\Rightarrow\sqrt{z}=\frac{\sqrt{d+c}+\sqrt{d-c}}{2},$$

а

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{d+c}-\sqrt{d-c}}{2}.$$

Таким образом, основания трапеции равны

$$\frac{\left(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c}\right)^2}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\left(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c}\right)^2}{2}$

4. *Найдите четыре действительных числа x_1, x_2, x_3, x_4, таких, что что каждое, сложенное с произведением остальных, окажется равным двум.*

Решение. Обозначим $x_1x_2x_3x_4 = p$. Тогда наша система уравнений примет вид:

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Случай, когда одно из искомых чисел равно нулю, приводит к противоречию. Действительно, подставив ноль вместо x_1, получим

$$x_2x_3x_4 = 2, x + 2 = x + 3 = x + 4 = 2.$$

Итак, все x_i являются корнями одного и того же квадратного уравнения $x_i^2 - 2x_i + p = 0$. Поэтому среди них может быть только два различных. Рассмотрим три случая.

(а) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, $m + m^2 = 2$. В силу монотонности функции $m + m^2$ имеем только действительное решение $m = 1$.

(б) Три из искомых чисел равны, а четвертое им не равно. Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = m$, $x_4 = n$, $m \neq n$,

$$\begin{cases} m + m^2 n = 2, \\ n + m^3 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $(m - n)(1 - m^2) = 0$. Т.к. $m \neq n$, получаем, что $1 - m^2 = 0$. Заметим, что $m \neq 1$, т.к. в противном случае из системы соотношений немедленно следует, что $n = 1$, что противоречит $m \neq n$. Значит, $m = -1$, откуда следует, что $n = 3$. Это дает еще четыре решения.

(в) $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n$, $m \neq n$,

$$\begin{cases} m + mn^2 = 2, \\ n + nm^2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $(m - n)(1 - mn) = 0 \Rightarrow mn = 1$. Тогда $m + n = 2$, $m = n = 1$. Противоречие.

Таким образом, либо $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, либо один из $x_i = 3$, а остальные равны -1.

5. *Для всех значений параметра a решите неравенство*

$$\log_{\sqrt{2a}}(a + 2x - x^2) < 2.$$

Решение. Допустимые значения переменной x задаются системой:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a < -, \\ a > 0, \\ a \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\log_{\sqrt{2a}} \left(a + 2x - x^2\right) < \log_{\sqrt{2a}} 2a \tag{2}$$

и предположим, что $0 < a < \dfrac{1}{2}$. Тогда неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 - 2x + a < 0$ и, таким образом, с учетом первого неравенства системы (1)приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a < 0, \\ x^2 - 2x + a < 0, \end{cases}$$

которая в силу второго неравенства системы (1) равносильна одному неравенству

$$x^2 - 2x + a < 0,$$

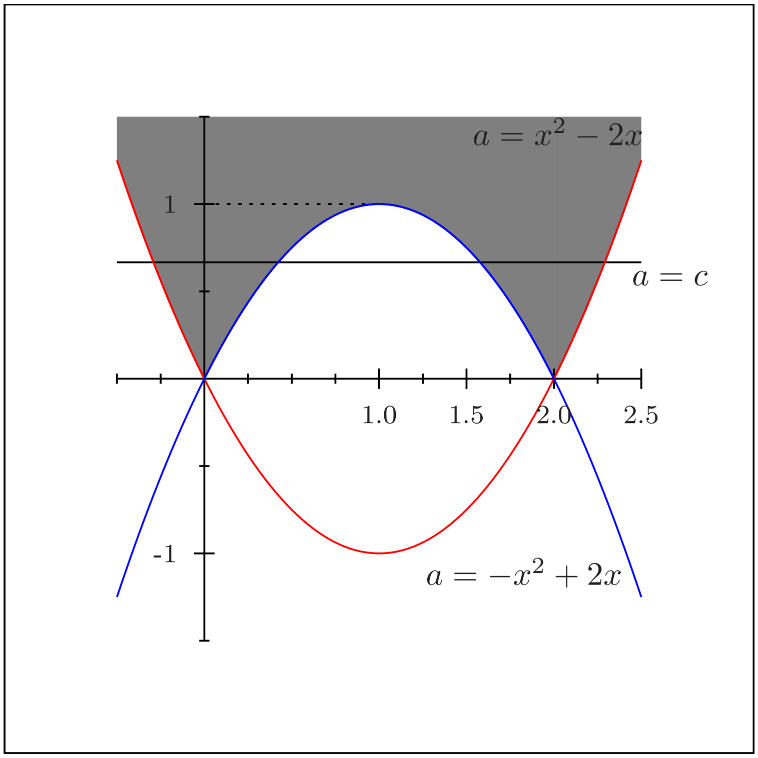
решениями которого являются все x такие, что $x_1 < x < x_2$, где $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ — корни уравнения $a = -x^2 + 2x$.

Пусть $a > \dfrac{1}{2}$. Тогда неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 - 2x + a > 0$. С учетом первого неравенства системы (1) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 - 2x - a < 0. \end{cases}$$

Начертим на плоскости xOa графики функций $a = x^2 - 2x$, $a = -x^2 + 2x$ и прямую $a = c \left(c > \dfrac{1}{2}\right)$. Парам (x, a), удовлетворяющим последней системе, соответствуют точки заштрихованной области.

Обозначая через x_3, x_4 корни уравнения $a = x^2 - 2x$, которые высчисляются по формулам $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+a}$, на основании полученных ранее результатов и непосредственно из рисунка прходим к выводу, что решениями исходного неравенства будут абсциссы x тех точек , которые принадлежат пересечению прямой $a = c \left(c > \dfrac{1}{2}\right)$ и заштрихованной области. На основании этого выписываем



Ответ.
$$\begin{array}{ll}
\text{если } a \leqslant 0 \text{ и } a = \dfrac{1}{2}, & \text{то решений нет;} \\
\text{если } 0 < a < \dfrac{1}{2}, & \text{то } x_1 < x < x_2; \\
\text{если } \dfrac{1}{2} < a \leqslant 1, & \text{то } x_3 < x < x_1, \quad x_2 < x < x_4; \\
\text{если } a > 1, & \text{то } x_3 < x < x_4; \\
\text{где } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}, & x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+a}.
\end{array}$$