Математика

Заполняется участниками

Укажите класс:

8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ■

Заполняется организаторами в аудитории

Кол-во доп.листов	Замена ручки	
		да

Шифр 74-11-01

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются

Задание	1	2	3	4	5	Итого	Подпись
Баллы	20	~~5~~ 0	20	5	20	65	[signature]

05 – [signature]

Время выполнения заданий - 235 минут. Максимальное количество баллов – 100.
Допускается использование листов с двух сторон. Пишите разборчиво.
Обязательно указывайте номер задания. Очередность выполнения заданий произвольная.
Запрещается использование карандаша и корректора.

Задание 3

Так как $p(1)=2015$ и $p(x)=ax^3+cx+bx^2+d$, то

$2015=a+b+c+d$

Аналогично с $p(2)$:

$2017=8a+4b+2c+d=2(4a+2b+c)+d$

$$\begin{cases} 2015=a+b+c+d, \\ 2017=2(4a+2b+c)+d; \end{cases}$$

видно, что выражение $2(4a+2b+c)$ - чётно, при любых значениях a, b и c (за искл. ~~нуля~~ случая ~~a~~ ~~равна~~ $a=b=c=0$). Тогда, очевидно, что d - нечётное.

Возвращаясь к первому ур-нию системы

$2015=a+b+c+d$

~~2015=с~~ $2015-d=a+b+c$

Можно увидеть что выражение в правой части должно быть чётно

Отсюда возможны следующие решения:

1. a - нечётно, b - нечётно, c - чётно
2. a - чётно, b - чётно, c - чётно
3. a - нечётно, b - чётно, c - нечётно
4. a - чётно, b - нечётно, c - нечётно
5. $a=b=c=0$, $d=2015$ (т.е. нечётно)
6. $a=0$
   b,c - чёт.
   b,c - нечёт
   $b=0$
   a,c - чёт
   a,c - нечёт
   $c=0$
   a,b - чёт
   a,b - нечёт

7. $a=b=0$ $\quad$ $b=c=0$ $\quad$ $a=c=0$

c - чётн. $\quad$ a - чётн. $\quad$ b - чётн.

Уравнение $p(x)=2016$ можно записать в виде

$$x(ax^2+bx+c)+d=2016$$

Если x - чётно, то всё выражение ~~слу~~ слева имеет нечётное значение, а 2016 - чётно, откуда противоречие

Если x - нечётно, то во всех семи случаях выражение слева имеет нечётное значение ($x(ax^2+bx+c)$ - чётно, ax^2+bx+c - чётно во всех 7 случаях) откуда противоречие

Если же $x=0$, то т.к. d - нечётно, слева нечётное значение, откуда противоречие

Общий вывод: ур-ние $p(x)=2016$ не имеет целых корней.

+

Задание 5

Перепишем исходное ур-ние в таком виде

$2x^2-2016(x-2016+a)-1-a^2=0$, и обозначим выражение в левой части, как $f(x)$, тогда корни исходного ур-ние являются точками пересечения параболы $f(x)$ с осью Ox.

Известно, что число α тогда лежит между точками пересечения параболы с осью Ox, когда произведение главного коэффициента на $f(\alpha)$ меньше нуля.

Тогда a удовлетворяет двойному нер-ву $x_1<a<x_2$, когда выполняется след. условие

$$2(2a^2-2016(a-2016+a)-1-a^2)<0$$

$$2(a^2-4032a+2016^2-1)<0$$

$$a^2-4032a+2016^2-1<0$$

Решим данное нер-во, сначала найдя корни данного многочлена

$P(a)=a^2-4032a+2016^2-1$.

$D=4$

$a_1=2017$

$a_2=2015$

Искомые знач. a

$a\in(2015;2017)$

Ответ: $a\in(2015;2017)$.

Задание 1

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5) = \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2)\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)} =$$

$$= \frac{9}{7}$$

А отсюда следует, что первоначальное ур-ние можно переписать в виде

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{9}{7}\right) + \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 34 + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{14}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{9}{7} + \operatorname{arcctg} 13\right) = \frac{\frac{9}{7}\cdot 13 - 1}{\frac{9}{7} + 13} = \frac{117-7}{100} = \frac{11}{10}$$

А, отсюда:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{11}{10}\right) + \operatorname{arcctg} 34 + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{14}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{11}{10} + \operatorname{arcctg} 34\right) = \frac{\frac{11}{10}\cdot 34 - 1}{\frac{11}{10} + 34} = \frac{374-10}{351} = \frac{28}{27}$$

Откуда следует, что:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{28}{27}\right) + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{14}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{28}{27} + \operatorname{arcctg} 89\right) = \frac{\frac{28}{27}\cdot 89 - 1}{\frac{28}{27} + 89} = \frac{27\cdot 89 + 62}{27\cdot 89 + 28} = \frac{2465}{2431} = \frac{145}{143}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{145}{143} + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{14}\right)$$

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{14}\right) = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg}\frac{145}{143}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{14}\right) = \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1)\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{145}{143}\right) + 1}{\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{145}{143}\right) - \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1)} =$$

$$= \frac{\frac{145}{143} + 1}{\frac{145}{143} - 1} = \frac{145+143}{145-143} = \frac{288}{2} = 144$$

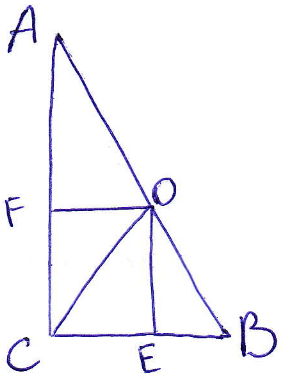
$$\frac{x}{14} = 144$$

$$x = 2016$$

Ответ: 2016.

Задание 4

Проведём в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом в т. C ~~бс~~ биссектрису угла ACB.



~~В~~ точку пересечения биссектрисы ∠ACB и отрезка AB обозначим букву O.
После проведения высот FO и OE получим квадрат FOEC.
Необходимо доказать, что этот квадрат самый большой по площади который можно поместить в прямоугольный треугольник ABC.

Квадрат можно задавать не только с помощью ~~ст~~ длины сторон, но и с помощью длины его диагонали. А если в прямоугольном треугольнике ABC провести диагональ с длиной больше OC и перпендикулярный ей и равный ей по длине, проходящий через центр диагонали отрезок (который также будет диагональю), так что оба отрезка с точками на концах будут принадлежать плоскости пересечения ΔABC, наше утверждение будет опровергнуто.

CE является проекцией OC на сторону BC и проекцией FE на BC. Проведём отрезок O'C' так, чтобы он полностью принадлежал плоскости треугольника ΔABC, был равен (или больше?) OC и имел больший угол наклона к BC; тогда его проекция на BC будет меньше CE а вот отрезок F'E' который должен был стать второй ~~диагональю нашего квадрата~~ диагональю квадрата будет иметь (почему?) проекцию больше чем CE, а (верно, но не доказано) следовательно его концы выходят за ~~плоск~~ плоскость пр. ΔABC. При большей длине O'C' также ничего не выйдет. (?) (нет док-ва) Для меньшего угла наклона к BC рассуждения аналогичны только для проекции следует использовать FC.
При таком же угле наклона к BC аналогичных квадратов или больших по площади не найти, т.к.

см. на след. стр.

Проведём отрезок $O'C'$ с такими углами наклона к BC и такой же длины, его конец C' лежит на AC, а конец O' не сможет попасть на сторону AB, т.к. в противном случае $\triangle AO'C' = AOC$, и получается, что $O' = O$, $C' = C$ чего быть не может

Аналогично для FE и BC.

~~Ответ: выявлено противоречие~~

Доказана невозможность провести диагонали больше или равные OC

Верная идея но ключевые факты не доказаны.

5 б.

+