Математика

Заполняется участниками

Укажите класс:

8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11 ☐

Заполняется организаторами в аудитории

Кол-во доп.листов	Замена ручки	
		да

Шифр 74_10_02

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются

Задание	1	2	3	4	5	Итого	Подпись
Баллы	0	1	20	15	0	36	[signature]

Время выполнения заданий - 235 минут. Максимальное количество баллов – 100.
Допускается использование листов с двух сторон. Пишите разборчиво.
Обязательно указывайте номер задания. Очередность выполнения заданий произвольная.
Запрещается использование карандаша и корректора.

(3) $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$;

$p(1)=2015$; $\Rightarrow a+b+c+d=2015$;

$p(2)=2017$; $\Rightarrow 8a+4b+2c+d=2017$; (значит, d-нечетное; ч+ч+ч+н=н;)

$p(2)-p(1)=7a+3b+c=2$; $\Rightarrow$

	a	b	c	d
I	ч	ч	ч	н
II	ч	н	н	н
III	н	н	ч	н
IV	н	ч	н	н

(таблица зависимости четности)

Допустим, x-четное:

(I) $\underbrace{ax^3}_{ч}+\underbrace{bx^2}_{ч}+\underbrace{cx}_{ч}+\underbrace{d}_{н}=\underbrace{2016}_{ч}$; что невозможно (случаи II, III, IV аналогичны, т.к. четное • четное = четное; нечетное • четное = четное, а x всегда четное)

Допустим, x-нечетное:

(I) $ax^3+bx^2+cx+d=2016$;
$\underbrace{ax^3}_{ч}+\underbrace{bx^2}_{ч}+\underbrace{cx}_{ч}+н=2016$; что невозможно;

(II) $ax^3+bx^2+cx+d=2016$;
$\underbrace{ax^3}_{ч}+\underbrace{bx^2}_{н}+\underbrace{cx}_{н}+н=н=2016$; что невозможно;

(III) $ax^3+bx^2+cx+d=2016$;
$\underbrace{ax^3}_{н}+\underbrace{bx^2}_{н}+\underbrace{cx}_{ч}+н=н=2016$; что невозможно;

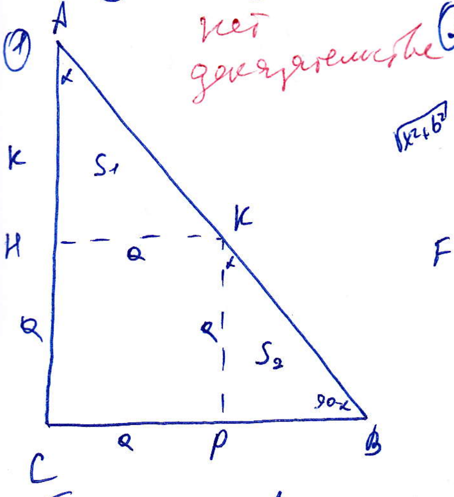
(IV) $ax^3+bx^2+cx+d=2016$;
$\underbrace{ax^3}_{н}+\underbrace{bx^2}_{ч}+\underbrace{cx}_{н}+н=н=2016$; что невозможно;

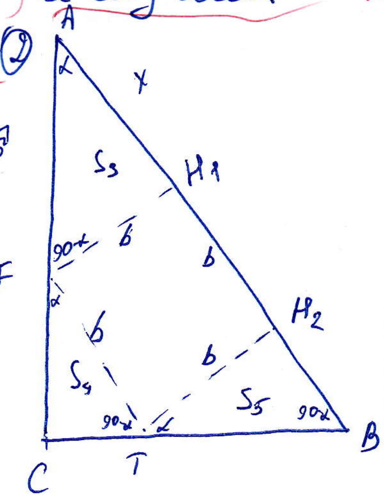
Значит, у $p(x)=2016$ нет целых корней; ч.т.д.

+

(4)

Очевидно, что самый большой по площади квадрат должен касаться хотя бы одной стороны треугольника.
Тогда возможны 2 случая: не обосновано, почему нет других случаев





Д-ть: $a^2 > b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1 + S_2 < S_3 + S_4 + S_5$;

Д-во:

$AH = k$; $AH_1 = x$; (3')

$S_\Delta - S_{кв(a)} = \frac{1}{2}ka + \frac{1}{2}a\cdot\frac{a^2}{k} = \frac{1}{2}AH\cdot HK + \frac{1}{2}KP\cdot PB$;

$\frac{AH}{HK} = \frac{KP}{PB}$; $PB = \frac{HK\cdot KP}{AH} \Rightarrow PB = \frac{a^2}{k}$;

$S_\Delta - S_{кв(б)} = \frac{1}{2}AH_1\cdot H_1F + \frac{1}{2}TH_2\cdot H_2B + \frac{1}{2}FC\cdot CT = \frac{1}{2}xb + \frac{1}{2}b\cdot\frac{b^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{xb^3}{(x^2+b^2)}$; (4')

$\frac{TH_2}{H_2B} = \frac{AH_1}{H_1F}$; $H_2B = \frac{TH_2\cdot H_1F}{AH_1} = \frac{b^2}{x}$;

$\frac{AF}{AH_1} = \frac{FT}{FC}$; $FC = \frac{FT\cdot AH_1}{AF}$;

$FC = \frac{bx}{\sqrt{x^2+b^2}}$;

$\frac{AF}{FH_1} = \frac{FT}{CT}$; $CT = \frac{FH_1\cdot FT}{AF} = \frac{b^2}{\sqrt{x^2+b^2}}$;

$$\begin{cases} \frac{bx + x^2 + b^2}{\sqrt{x^2+b^2}} = k + a; & (1') \\ \frac{b^2}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{b^2x^2 + b^4}{x^2} = a + \frac{a^2}{k}; & (2') \end{cases}$$

① Обозначим $\angle A = \alpha$; то $\angle B = 90 - \alpha$; $\Rightarrow$ $\angle PKB = \alpha$; $\Rightarrow \angle HKA = 90 - \alpha$; (т.к. углы $CHKP = 90°$);

② $\angle A = \alpha$; (треугольники в первом и втором случае равны), то $\angle B = 90 - \alpha$; $\Rightarrow \angle H_2TB = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle FTC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha \Rightarrow \angle CFT = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AFH_1 = 90 - \alpha$ (т.к. углы $H_1H_2TF = 90°$);

① $\triangle AHK \sim \triangle KPB \sim \triangle ACB$ (по 2 углам; $\angle A = \angle PKB$; $\angle AHK = \angle ACB = \angle KPB$);
поэтому: $AH : AC : KP = AK : AB : KB = HK : BC : PB$;

② $\triangle AH_1F \sim \triangle ACB \sim \triangle FCT \sim \triangle TH_2B$; (по 2-м углам; $\angle A = \angle CFT = \angle BTH_2$; $\angle AH_1F = \angle ACB = \angle FH_2B$);
поэтому: $AH_1 : AC : FC : TH_2 = AF : AB : FT : TB = H_1F : CB : TC : H_2B$;

Но если $b^2 > a^2$ ($\Rightarrow b > a$), а $k > x$, что следует из равенств 1' и 2', то $S_1 + S_2 > S_3 + S_4 + S_5$, что противоречит равенствам 3' и 4' $\Rightarrow$ $a > b$, ч.т.д.

① $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 34 + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}\frac{x}{14}$;

неверный переход.

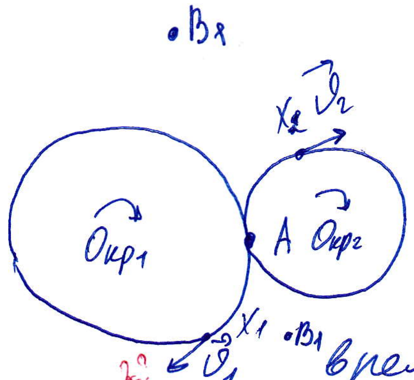
$\operatorname{ctg} 45 = \operatorname{ctg} 2 + \operatorname{ctg} 5 + \operatorname{ctg} 13 + \operatorname{ctg} 34 + \operatorname{ctg} 89 + \operatorname{ctg}\frac{x}{14}$;

$\frac{\cos 45}{\sin 45} = \frac{\cos 2}{\sin 2} + \frac{\cos 5}{\sin 5} + \frac{\cos 13}{\sin 13} + \frac{\cos 34}{\sin 34} + \frac{\cos 89}{\sin 89} + \frac{\cos\frac{x}{14}}{\sin\frac{x}{14}}$; $x : 14$;

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $102 = \frac{x}{14}$; $x = 1428$; Ответ: 1428;

−

(2)



$\frac{L_1}{\vartheta_1}=\frac{L_2}{\vartheta_2}$; t — общее время 1 круга.

Допустим, в момент времени t_1 в точке B_1: $B_1X_1=B_1X_2$; то в момент времени $t-t_1$ найдется точка B_1' такая, что $B_1'X_1=B_1'X_1$; координата точки неизвестна. В момент времени t_2 найдется точка B_2, что $B_2X_1=B_2X_2$, то в момент времени $t-t_2$ найдется точка B_2', что $B_2X_1=B_2X_2$; имея 4 точки заметим, что через них можно построить окружность, т.к $B_1B_1'=B_2B_2'$ (из равенств $\frac{L_1}{\vartheta_1}=\frac{L_2}{\vartheta_2}$ и $(t-t_1)+t_1=t$; $(t-t_2)+t_2=t$;) $\Rightarrow$ в любой момент времени можно найти на этой окружности точку B_y, что

не верно, что равенство для всех точек окружности

$B_yX_1=B_yX_2$; но при этом отрезки от X_1 и X_2 до центра этой окружности будут равны (нет) ($B_{окр}X_1=B_{окр}X_2$) $\Rightarrow$ такая точка сущ-ет.

ч.т.д.

идея для построения верна, реализация неверна

(⊙)

(5) $2x^2-2016x+(2016^2-2016a-1-a^2)=0$;

$D=2016^2-8\cdot2016^2+8\cdot2016a+8+8a^2$; $D>0$;

$x_1+x_2=1008=-\frac{b}{a}$;

$x_1x_2=\frac{2016^2-2016a-1-a^2}{2}=\frac{c}{a}$;

$504-\frac{\sqrt{D}}{4}<a<504+\frac{\sqrt{D}}{4}$; $\Leftarrow$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=504\pm\frac{\sqrt{D}}{4}$;

остатки: $0/2-0-1=0/1$; $\Rightarrow x^2 \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 2$;

(−)