Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Вася и Петя выиграли на олимпиаде N пакетов с мерчем одной очень известной IT компании. Пакеты нумеруются с 0 до $N - 1$. И в пакете с номером i ровно 2^i ручек. Вася и Петя хотят разделить пакеты таким образом, чтобы разница между суммарным количеством ручек у каждого из них была минимально возможной, при этом они не хотят перекладывать ручки из одного пакета в другой.
1) (5 баллов) Каким образом Вася и Петя должны поделить пакеты и какой минимальной разницы они могут достигнуть при $N = 6$?
2) (20 баллов) Каким образом Вася и Петя должны поделить пакеты и какой минимальной разницы они могут достигнуть при $N = 1024$?

Задание 2. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из 256 столбцов и 1024 строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего квадрат 2×2 клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом или последнем столбцах, или в первой или последней строчках.

Задание 3. (25 баллов) Гриша увлекается рисованием. В данный момент он хочет изобразить пейзаж с двумя горами. Для простоты Гриша решил, что поверхность земли он изобразит в качестве прямой линии, а горы в виде двух равнобедренных треугольников, основанием лежащих на линии земли. Углы при основании гор равняются $45°$.
С одной стороны, Гриша планирует сохранить аутентичность пейзажа, поэтому он хочет, чтобы общая протяженность поверхности гор равнялась X условных единиц.
С другой стороны, немного художественного вымысла не помешает, поэтому Гриша хочет минимизировать площадь гор на рисунке, чтобы сэкономить краску.
Помогите Грише найти минимальную площадь гор на рисунке, если общая протяженность поверхности гор равняется 1024.

Задание 4. (25 баллов) Саша недавно научился играть в нарды. Но правила игры показались ему слишком сложными, поэтому он решил их упростить.
Поскольку Саша не любит играть с кем-то, то в первую очередь он решил, что будет играть один и не будет ни с кем соревноваться. Затем Саша решил, что начинать из одной и той же позиции – это скучно, поэтому начал экспериментировать. Теперь он просто располагает фишки по каким-то лункам и начинает с такой конфигурации.
Более формально, поле для игры в нарды состоит из 24 лунок. У Саши есть 18 фишек, которые он изначально расставляет по лункам. В лунке может стоять любое количество фишек.
Теперь Саше стало интересно, сколько же существует вариантов стартовых позиций. Помогите ему ответить на этот вопрос.

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из 512 столбцов и 2048 строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего квадрат 2×2 клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 64.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом или последнем столбцах, или в первой, или последней строчках.

Задание 2. (25 баллов) Гриша увлекается рисованием. В данный момент он хочет изобразить пейзаж с двумя горами. Для простоты Гриша решил, что поверхность земли он изобразит в качестве прямой линии, а горы в виде двух равнобедренных треугольников, основанием лежащих на линии земли. Углы при основании гор равняются $45°$.
С одной стороны, Гриша планирует сохранить аутентичность пейзажа, поэтому он хочет, чтобы общая протяженность поверхности гор равнялась X условных единиц.
С другой стороны, немного художественного вымысла не помешает, поэтому Гриша хочет минимизировать площадь гор на рисунке, чтобы сэкономить краску.
Помогите Грише найти минимальную площадь гор на рисунке, если общая протяженность поверхности гор равняется 4096.

Задание 3. (25 баллов) Саша недавно научился играть в нарды. Но правила игры показались ему слишком сложными, поэтому он решил их упростить.
Поскольку Саша не любит играть с кем-то, то в первую очередь он решил, что будет играть один и не будет ни с кем соревноваться. Затем Саша решил, что начинать из одной и той же позиции – это скучно, поэтому начал экспериментировать. Теперь он просто располагает фишки по каким-то лункам и начинает с такой конфигурации.
Более формально, поле для игры в нарды состоит из 24 лунок. У Саши есть 18 фишек, которые он изначально расставляет по лункам. В лунке может стоять любое количество фишек.
Теперь Саше стало интересно, сколько же существует вариантов стартовых позиций. Помогите ему ответить на этот вопрос.

Задание 4. (25 баллов) Антон увлекается математикой и сегодня он изучает *красоту* натуральных чисел. Красотой натурального числа X Антон считает количество пар натуральных чисел a и b, таких что их наибольший общий делитель равняется 1, а их произведение равняется X. Помогите Антону найти ответы на следующие вопросы.
1) (4 балла) Какова *красота* числа 101?
2) (21 балл) Какая максимальная *красота* среди первых 1024 натуральных чисел?

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Рассмотрим все пары целых чисел a и b, таких что $1 \leq a \leq b \leq 2048$. Для скольких из них выполняется следующее неравенство: $gcd\ (a, b) < a\ xor\ b$?

- $gcd\ (a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b
- Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются.

Например, $7_{10}\ xor\ 5_{10} = 111_2\ xor\ 101_2 = 010_2 = 2_{10}$

Задание 2. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.

Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.

1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.
2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x).$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот Вам функция от двух переменных

$$F(n, k) = \sum_{i=1}^{n} gcd\ (i, i + k)$$

где $gcd\ (a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.

1) (1 балл) Найдите $F(7, 7)$
2) (24 балла) Найдите $F(1024, 1024)$

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.
1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.
2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Задание 2. (25 баллов) Будем называть *красотой* массива из N положительных целых чисел следующее выражение

$$\sum_{i=0}^{N-1} |a_i - a_{i+1}|$$

где a_i — элемент массива с номером i. Назовем *минимальной красотой* наименьшее значение *красоты* массива по всем его перестановкам, иными словами по всем способам переупорядочить элементы массива. Сколько существует массивов с *минимальной красотой* и *красотой* равной 2048 из 1024 положительных целых чисел, не превосходящих 10000?

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x)$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот вам функция от двух переменных

$$F(n,k) = \sum_{i=1}^{n} gcd\,(i, i+k)$$

где $gcd\,(a,b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.
1) (1 балл) Найдите $F(10,7)$
2) (24 балла) Найдите $F(1621620, 16380)$