Время выполнения заданий — 235 минут. Максимальное количество баллов — 100

Задание 1. (20 баллов)

Даны шесть карандашей в виде одинаковых прямых круговых цилиндров. Расположите их в пространстве так, чтобы каждый карандаш имел общую граничную точку с любым другим карандашом.

Задание 2. (20 баллов)

Найдите наибольшее возможное значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

Задание 3. (20 баллов)

В памяти суперкомпьютера находится строка чисел, бесконечная в обе стороны. В начальный момент одно число строки равно единице, а все остальные нули. За один шаг суперкомпьютер прибавляет к каждому из чисел строки сумму обоих соседних с ним чисел (все прибавления происходят одновременно). Получается такая последовательность строк:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{Шаг 0:} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\text{Шаг 1:} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\text{Шаг 2:} & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\text{Шаг 3:} & \dots & 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 0 & \dots \\
\dots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Правда ли, что начиная со второго шага в каждой строке встретится хотя бы одно четное число? Ответ обосновать.

Задание 4. (20 баллов)

Можно ли выражение $1 + x^{2016}y^{2016}$ представить в виде произведения $f(x) \cdot g(y)$? Ответ обосновать.

Задание 5. (20 баллов)

Докажите, что если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника, то радиус окружности, вписанной в этот треугольник, можно найти по формуле

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Время выполнения заданий — 235 минут. Максимальное количество баллов — 100

Задание 1. (20 баллов)

Известно, что единственным решением уравнения

$$\pi/4 = \operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 34 + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}(x/14)$$

является натуральное число. Найдите его.

Задание 2. (20 баллов)

Пусть A — точка пересечения двух окружностей. Из этой точки по каждой окружности, по часовой стрелке, с постоянными скоростями начинают двигаться точки X_1 и X_2. Через один оборот обе точки вновь оказываются в A. Докажите, что всегда найдется такая неподвижная точка B, что всё время движения выполняется равенство $X_1B = X_2B$.

Задание 3. (20 баллов)

Про кубический многочлен $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами a, b, c, d известно, что $p(1) = 2015$ и $p(2) = 2017$. Докажите, что уравнение $p(x) = 2016$ не имеет целых корней.

Задание 4. (20 баллов)

Докажите, что самый большой по площади квадрат, помещающийся в прямоугольный треугольник, имеет с ним общий угол.

Задание 5. (20 баллов)

Найдите все значения параметра a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения

$$2x^2 - 2016(x - 2016 + a) - 1 = a^2$$

удовлетворяют двойному неравенству $x_1 < a < x_2$.