Задача 1. Упругая оболочка (15 баллов)

Внутри упругой оболочки находится один моль идеального одноатомного газа. Давление газа зависит от объема оболочки по закону $p=p_0+kV$, где p_0 и k – известные постоянные. После того, как газу сообщили некоторое количество теплоты Q, его объем увеличился на величину ΔV. Найдите первоначальный объем газа V_1.

Решение:

Согласно первому началу термодинамики:

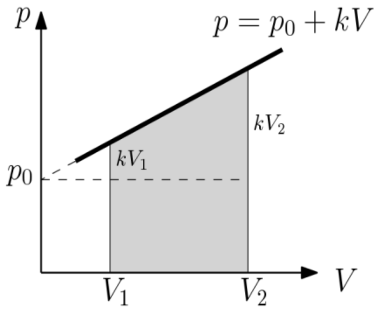
$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU – изменение внутренней энергии газа, A – работа, совершенная газом над внешними телами (оболочкой)

Для идеального одноатомного газа получим:

$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + A$,

где ΔT – изменение температуры газа.



Работу газа по расширению оболочки вычислим как площадь под кривой процесса в координатах $p - V$:

$A = p_0\Delta V + \frac{1}{2}(kV_2 + kV_1)(V_2 - V_1) = p_0\Delta V + \frac{k}{2}(V_2^2 - V_1^2)$,

где V_2 – конечный объем газа.

Преобразовывая выражение для работы, получаем:

$$A = p_0\Delta V + \frac{k}{2}\Delta V(2V_1 + \Delta V),$$

отсюда

$$A = p_0\Delta V + kV_1\Delta V + \frac{k}{2}\Delta V^2.$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для начального состояния газа:

$$(p_0 + kV_1)V_1 = RT_1$$
$$p_0V_1 + kV_1^2 = RT_1$$

Для конечного:

$$(p_0 + kV_1 + k\Delta V)(V_1 + \Delta V) = RT_2$$
$$p_0V_1 + kV_1^2 + p_0\Delta V + 2kV_1\Delta V + k\Delta V^2 = RT_2$$

Из двух уравнений состояния следует:

$$p_0\Delta V + 2kV_1\Delta V + k\Delta V^2 = R\Delta T$$

Сопоставим результат с первым началом термодинамики:

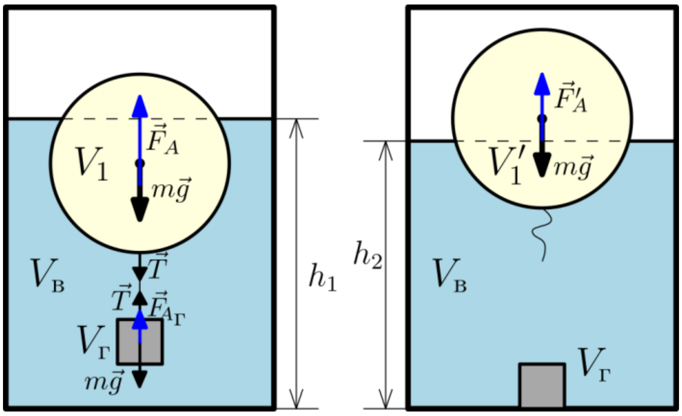
$$Q = \frac{3}{2}p_0\Delta V + 3kV_1\Delta V + \frac{3}{2}k\Delta V^2 + p_0\Delta V + kV_1\Delta V + \frac{k}{2}\Delta V^2$$
$$Q = \frac{5}{2}p_0\Delta V + 4kV_1\Delta V + 2k\Delta V^2$$
$$V_1 = \frac{Q - \frac{5}{2}p_0\Delta V - 2k\Delta V^2}{4k\Delta V}.$$

Критерий оценивания	Значение	Балл
В решении использовано первое начало термодинамики и два уравнения Менделеева-Клапейрона (для начального и конечного состояний газа)		5
Найдена работа, совершенная газом по расширению оболочки		5
Записан правильный ответ		5

Задача 2. Сила архимеда (25 баллов)

Школьник Андрей экспериментирует с моделью речного буйка, которая представляет собой пластиковый шар с прикреплённым к нему на нити небольшим грузом одинаковой с шаром массы в качестве якоря. Андрей погружает свою модель в сосуд с площадью поперечного сечения 100 см^2, и шар погружается на 2/3 своей высоты. Андрей перерезает нить, соединяющую шар и груз, и шар всплывает. Уровень воды в сосуде после перерезания нити изменился на 1 см. Определите плотность секретного материала, из которого сделан груз буя и его объём. Известно, что плотность груза в 12 раз больше средней плотности шара.

Решение



Значения переменных после перерезания нити будем обозначать штрихом.

Для общего объёма системы (вода – погружённая часть шара – груз) имеем:

$$Sh_1 = V_В + V_1 + V_Г, \qquad (1)$$

$$Sh_2 = V_В + V_1^{/} + V_Г, \qquad (2)$$

откуда, вычитая второе из первого, имеем:

$$S\Delta h = V_1 - V_1^{/} = \Delta V_1. \qquad (3)$$

Массы шара и груза по условию равны $m_Г = m_Ш = m$.

Запишем условия плавания для шара до и после перерезания нити:

$$0 = F_A - T - mg, \qquad (4)$$

$$0 = F_А^{/} - mg. \qquad (5)$$

для плавания груза:

$$0 = T - mg + F_{AГ}. \qquad (6)$$

Вычитая из (4) (6) получаем:

$F_A = 2T + F_{AГ}$, и выражая силу Архимеда через объём, получаем:

$$V_Г = V_1 - 2\Delta V_1. \qquad (7)$$

С другой стороны, складывая (4) и (6) получаем:

$F_A + F_{AГ} = 2mg$, и получаем:

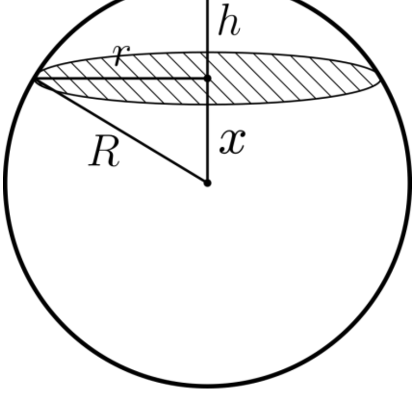
$\rho_В V_1 + \rho_В V_Г = 2m$, откуда, поделив обе части на $V_Г$, имеем:

$$\rho_г = \frac{\rho_В}{2}\left(\frac{V_1}{V_Г} + 1\right). \qquad (8)$$

По условию дано, что $\rho_Г = 12\rho_Ш$, откуда, принимая во внимание равенство масс шара и груза, получаем:

$$V_Г = \frac{1}{12}V_Ш. \qquad (9)$$

Остаётся найти связь объёма шарового сегмента V_1 с объёмом шара $V_Ш$. Объём шарового сегмента может быть вычислен исходя из следующих соображений:



Пусть радиус сферы *R*, а радиус круга в толще сегмента – *r*. Высота сегмента *h*.

Тогда из геометрических соображений имеем площадь тонкого слоя сегмента $S = \pi r^2$, а его объём $dV = Sdx$, где *dx* – толщина слоя. Выражая *r* через *x* и *R* по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $r^2 = R^2 - x^2$, где *x* – расстояние от центра сферы до тонкого слоя, имеем $dV = \pi(R^2 - x^2)dx$, проинтегрируем по высоте в пределах от высоты основания (R-h) до вершины (R) шарового сегмента. Получаем:

$V_S = \pi \int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = V_1$ отсюда зная, что $h = \frac{2D}{3} = \frac{4R}{3}$, получаем:
$V_1 = \pi\left(\frac{4R}{3}\right)\left(R - \frac{4R}{9}\right) = \frac{5\pi}{9}\left(\frac{4}{3}\right)R^3$. Зная, что объём шара $V_{\text{Ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, получаем:

$$V_1 = \frac{20}{27}V_{\text{Ш}} = \alpha V_{\text{Ш}}, \text{ где } \alpha = \frac{20}{27}. \quad (15)$$

Подставляя (15) и (9) в (8) получаем:

$$\rho_{\text{Г}} = \frac{\rho_{\text{В}}}{2}(1 + 12\alpha) = \frac{\rho_{\text{В}}}{2}\left(1 + \frac{12\cdot 20}{27}\right) = \frac{89}{18}\rho_{\text{В}}.$$

А подставляя (15) (3) и (9) в (7) находим:

$$V_{\text{Г}} = \frac{2S\Delta h}{12\alpha - 1} = \frac{18}{71}S\Delta h.$$

Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Получено условие, эквивалентное (3)		5
Записаны условия плавания шара и груза		5
Найден объем шарового сегмента (15)		5
Получено выражение для объёма груза	$V_{\text{Г}} = \frac{18}{71}S\Delta h$	5
Определена плотность секретного материала	$\rho_{\text{Г}} = \frac{89}{18}\rho_{\text{В}}$	5

Задача 3. Батарейка (15 баллов)

Если батарею собрать из трех одинаковых гальванических элементов, соединенных последовательно, а затем подключить к нагрузке, в цепи пойдет ток 375 мА. Если последовательно соединить шесть таких же элементов, и подключить к той же нагрузке, получим ток 600 мА. Найдите предельное значение тока в цепи, который можно получить при этой нагрузке, увеличивая число последовательно соединенных элементов.

Решение

Токи, указанные в условии, различаются, потому что каждый элемент обладает внутренним сопротивлением.
Ток в нагрузке при последовательном соединении *n* элементов вычисляется по формуле:

$$I_n = \frac{n\varepsilon}{nr + R}, \quad (1)$$

где ε и r – э.д.с. и внутреннее сопротивление каждого из них, R – сопротивление нагрузки.
Запишем выражение для тока в первой цепи (три элемента):

$$I_1 = \frac{3\varepsilon}{3r + R}, \quad (2)$$

Сила тока в цепи с шестью элементами:

$$I_2 = \frac{6\varepsilon}{6r + R}, \quad (3)$$

При очень больших n согласно (1) мы можем пренебречь значением *R* в знаменателе первого выражения. В этом случае ток в цепи становится равным току короткого замыкания:

$$I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r},$$

Из этой системы уравнений (2) и (3) можно получить, что

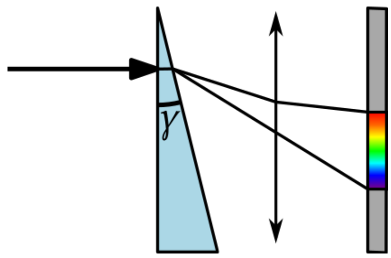
$$I_{\text{кз}} = \frac{I_1 I_2}{2I_1 - I_2} = 1.5 \text{ A},$$

Это и есть предельный ток, про который спрашивается в задаче.

Критерий оценивания	Значение	Балл
Правильно записанная формула для произвольного числа последовательно соединенных элементов		5
Утверждение о том, что в случае большого числа элементов можно пренебречь сопротивлением внешней нагрузки		5
Найдено значение тока короткого замыкания	1.5 А	5

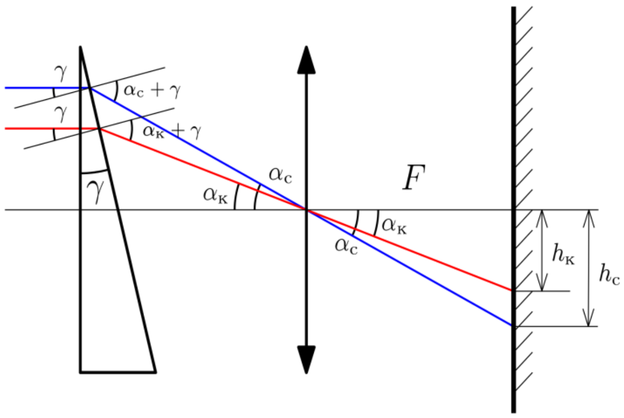
Задача 4. Монохроматор (20 баллов)

Параллельный пучок белого света падает на оптическую систему призма - собирающая линза. В фокальной плоскости линзы на экране видна радужная полоска. Расстояние от главной оптической оси до красной зоны полоски с длиной 680 нм – 4 мм, а до синей полоски с длиной волны 520 нм – 5 мм. Зависимость показателя преломления призмы от длины волны: n=(A+B/λ). Найдите Коэффициенты A и B. Оптическая сила линзы 5 дптр. Преломляющий угол призмы γ=0.05 рад.



Решение

Для каждой конкретной длины волны пучок будет отклоняться призмой, а после прохождения через линзу будет фокусироваться в точку в фокальной плоскости (если пренебречь зависимостью фокусного расстояния линзы от длины волны). Для нахождения положения этой точки необходимо рассмотреть луч, проходящий через оптический центр линзы. Ход таких лучей для красного и синего цветов показан на рисунке



Обозначим как $\alpha_с$ и $\alpha_{кр}$ углы, которые будут составлять синий и красный лучи с оптической осью линзы после прохождения призмы. Тогда можно записать законы преломления для таких лучей:

$n_с sin\gamma = sin(\gamma + \alpha_с)$,

$$n_{кр} sin\gamma = sin(\gamma + \alpha_{кр}).$$

Принимая во внимание малость угла γ, и, как следствие, углов $\alpha_с$ и $\alpha_{кр}$

$$n_с = \frac{\gamma+\alpha_с}{\gamma} = 1 + \frac{\alpha_с}{\gamma}, n_{кр} = \frac{\gamma+\alpha_{кр}}{\gamma} = 1 + \frac{\alpha_{кр}}{\gamma}$$

Рассматривая падение лучей на экран, получим

$$\frac{h_с}{F} = tg\ \alpha_с \approx \alpha_с;\ \frac{h_с}{F} = tg\ \alpha_с \approx \alpha_с.$$

Тогда

$$n_с = 1 + \frac{h_с}{F\gamma};\ \text{аналогично, } n_{кр} = 1 + \frac{h_{кр}}{F\gamma}.$$

По условию показатели преломления для синего и красного цвета имеют вид

$$A + \frac{B}{\lambda_с} = n_с,\ A + \frac{B}{\lambda_{кр}} = n_{кр}.$$

Вычислив разницу показателей преломления, получим:

$$B\left(\frac{1}{\lambda_с} - \frac{1}{\lambda_{кр}}\right) = \frac{h_c - h_{кр}}{F\gamma},\ B = \frac{(h_c - h_{кр})\lambda_c\lambda_{кр}}{F\gamma(\lambda_c - \lambda_{кр})} = \frac{D(h_c - h_{кр})\lambda_c\lambda_{кр}}{\gamma(\lambda_c - \lambda_{кр})}.$$

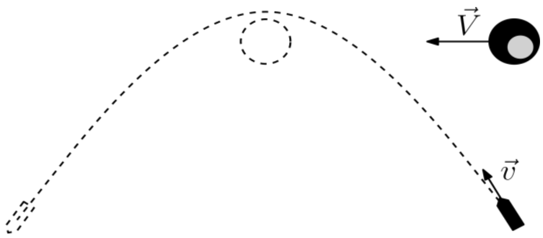
Коэффициент A можно найти как:

$$A = 1 + D\frac{h_c}{\gamma} - \frac{B}{\lambda_c}.$$

После подстановки численных значений получаем $A = 1.075$, $B = 221 \cdot 10^{-9}$ м.

Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Использование закона преломления		4
Приближение малости углов		4
Система уравнений на коэффициенты A и B		4
Итоговые выражения	$B = \frac{D(h_c - h_{кр})\lambda_c\lambda_{кр}}{\gamma(\lambda_c - \lambda_{кр})}$. $A = 1 + D\frac{h_c}{\gamma} - \frac{B}{\lambda_c}$.	4
Численный ответ	$A = 1.075$, $B = 221 \cdot 10^{-9}$ м	4

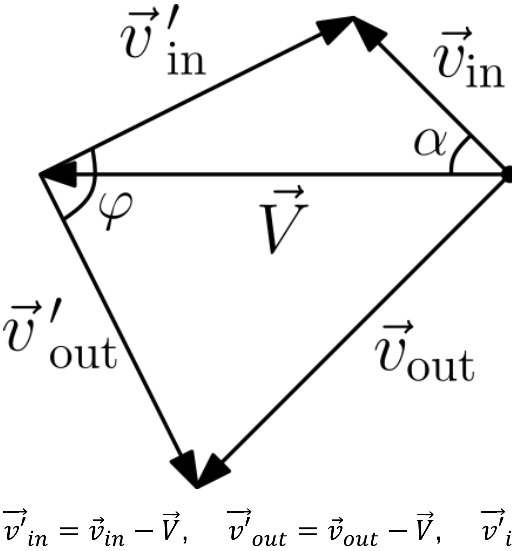
Задача 5. Гравитационный манёвр (25 баллов)



При космических перелётах для экономии топлива при разгоне или торможении используют так называемые *гравитационные маневры*, когда космический аппарат изменяет свою скорость за счёт гравитации массивного тела (звезды или планеты). Пусть космический корабль приближается со скоростью 5 км/с к планете, движущейся по своей орбите со скоростью 20 км/с, и совершает разворот вокруг неё. Какую скорость приобретёт корабль после манёвра, если изначально угол между скоростями корабля и планеты составлял 30° (в неподвижной системе отсчёта), а с точки зрения обитателя планеты вектор скорости корабля совершил поворот на 60°. Во всё время манёвра двигатель остаётся выключенным.

Решение

Рассмотрим манёвр космического корабля вокруг планеты в её системе отсчёта. Если скорость корабля больше второй космической для планеты (а это необходимо для удаления корабля от планеты вместо выхода на орбиту), то корабль будет двигаться по гиперболической траектории, и в результате манёвра (после выхода корабля из сферы действия планеты) изменится только направление относительной скорости корабля, но не её величина. Однако в неподвижной системе отсчёта может измениться и модуль скорости, т. к. меняется угол между скоростью планеты и направлением относительной скорости.



Относительная скорость корабля $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}$. Будем обозначать индексом in начальные скорости, индексом out – конечные. Тогда $\vec{v'}_{in} = \vec{v}_{in} - \vec{V}$, $\vec{v'}_{out} = \vec{v}_{out} - \vec{V}$, $\vec{v'}_{in} = \vec{v'}_{out}$. Тогда данные вектора образуют конфигурацию, показанную на рисунке.

По теореме косинусов из верхнего треугольника находим v'_{in}:

$$v'_{in} = \sqrt{{v_{in}}^2 + V^2 - 2v_{in}V\cos\alpha} = 15.87 \text{ км/с.}$$

По теореме синусов находим угол между $\overrightarrow{v'}_{in}$ и $\vec{V}$:

$$\sin\varphi_1 / v_{in} = \sin\alpha / v'_{in}; \ \varphi_1 = 9.06°.$$

Вычитаем его из φ, находим угол между $\overrightarrow{v'}_{out}$ и $\vec{V}$:

$$\varphi_2 = 50.94°.$$

Поскольку $\overrightarrow{v'}_{in} = \overrightarrow{v'}_{out}$ находим из нижнего треугольника по теореме косинусов v_{out}:

$$v_{out} = \sqrt{{v'_{in}}^2 + V^2 - 2v'_{in}V\cos\varphi_2} = 15.87 \text{ км/с.}$$

Ответ: конечная скорость корабля 15.87 км/с.

Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Догадка о равенстве модуля скорости корабля относительно планеты до и после манёвра		10
Выполнение необходимого построения		5
Определение конечной скорости корабля	$v_{out} \approx 16$км/с	10