8 класс

1. *Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то*

$$\frac{1}{4} < \frac{ab+bc+ac}{(a+b+c)^2} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Решение. Неравенство равносильно такому:

$$ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ac.$$

Левое неравенство справедливо при любых a, b и c, т.к.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0.$$

Правое равносильно следующему:

$$a(a-b-c) + b(b-a-c) + c(c-a-b) < 0.$$

Последнее неравенство — следствие того, что a, b и c являются длинами сторон треугольника, и поэтому

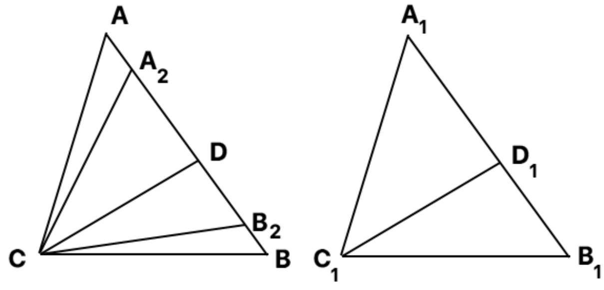
$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

2. *В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CD и C_1D_1 — биссектрисы углов C и C_1 соответственно. Известно, что*

$$AB = A_1B_1, CD = C_1D_1 \text{ и } \angle ADC = \angle A_1D_1C_1.$$

Окажутся ли равными треугольники ABC и $A_1B_1C_1$?

Решение. Для доказательства равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (см. рис.) достаточно доказать, что $\angle C = \angle C_1$.



Предположим противное. Пусть для определенности $\angle C > \angle C_1$. Тогда $\angle ACD > \angle A_1C_1D_1$. Проведем отрезки CA_2 и CB_2 так, чтобы $\angle A_2CD > \angle B_2CD = \angle A_1C_1D_1$. Тогда $\triangle A_1CD = \triangle A_1C_1B_1$ (по стороне и двум примыкающим к ней углам), поэтому $A_2D = A_1D_1$. Аналогично $B_2D = B_1D_1$. Тогда $A_1B_1 = A_2B_2 < AB$, что противоречит условию. Значит, $\angle C = \angle C_1$, что и требовалось доказать.

3. *Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2+9ab+b^2$ делится на 11, то $2a^2+9ab$ также делится на 11.*

Решение. Заметим, что

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + 9ab + b^2) - 11ab$$

делится на 11. Число 11 — простое. Поэтому $(a-b)$ делится на 11, и $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ — тоже делится на 11. Отсюда

$$2a^2 + 9ab = (a^2 + 9ab + b^2) + a^2 - b^2$$

также делится на 11.

4. *На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине — произведение чисел на трех гранях, смежных с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма чисел в вершинах равна 70.*

Решение. Пусть $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ — числа, написанные на гранях куба. Тогда

$$\begin{aligned} n_5(n_1n_4 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4) + n_6(n_1n_4 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4) = \\ = (n_5+n_6)(n_1(n_4+n_2) + n_3(n_2+n_4)) = \\ = (n_5+n_6)(n_4+n_2)(n_1+n_3) = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Так как все числа натуральные, то $n_1 + n_3 > 1$, и, следовательно,

$$(n_5+n_6) + (n_4+n_2) + (n_1+n_3) = 7 + 5 + 2 = 14.$$

$\boxed{\textbf{Ответ: } 14}$

5. *В кружочках расположены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается выбрать любую пару соседних (соединенных отрезком) чисел и прибавить к каждому из них одно и то же число (это число может меняться от шага к шагу). Можно ли из совокупности чисел на рис. 1 получить совокупность чисел, изображенных на рис. 2?*

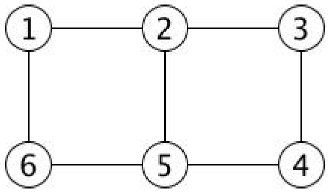


Рис. 1.

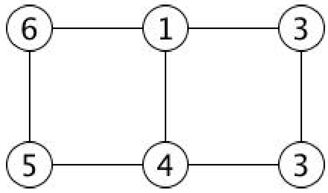
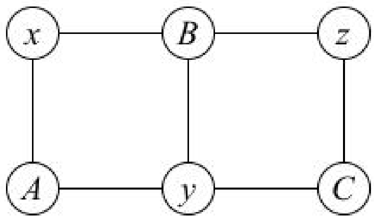


Рис. 2.

Решение. В этой задаче сумма $S = (x+y+z) - (A+B+C)$ является инвариантом, т.е. S остается постоянной после любого хода. Для начальной ситуации эта сумма равна



$$(1 + 3 + 5) - (6 + 4 + 2) = -3,$$

а для конечной она равна

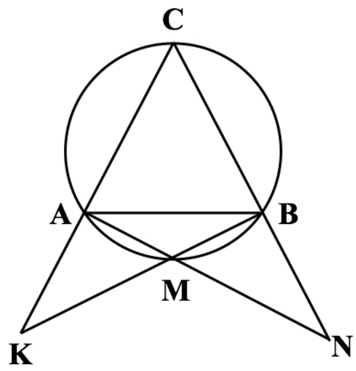
$$(6 + 4 + 3) - (5 + 1 + 3) = 4.$$

$\boxed{\textbf{Ответ: } \text{Нельзя}}$

9 класс

1. *В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На дуге AB, не содержащей точки C, выбрана точка M, отличная от точек A и B. Пусть прямые AC и BM пересекаются в точке K. , а прямые BC и AM — в точке N. Докажите, что произведение длин отрезков AK и BN не зависит от выбора точки M.*

Решение. Четырехугольник $ACBM$ вписан в окружность, следовательно, $\angle AMB = 120°$. Пусть $\angle CKB = \alpha$. Тогда в $\triangle KAB$:



$$\angle KAB = 120°, \angle ABK = 60° - \alpha.$$

В $\triangle ABM$:

$$\angle MAB = 180° - (\angle AMB + 60° - \alpha) = \alpha.$$

В треугольниках KAB и ABN тупые углы равны $120°$, и

$$\angle AKB = \angle BAN = \alpha.$$

Следовательно, эти треугольники подобны, и

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{BN},$$

т.е. произведение $AK \cdot BN = AB^2$ не зависит от положения точки M.

2. *Действительные числа x, y и z удовлетворяют системе неравенств*

$$\begin{cases} 4x + z > 2y, \\ y^2 < 4xz. \end{cases}$$

Докажите, что $z > 0$.

Решение. Приведем два решения.

1–ое решение. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(\alpha) = x\alpha^2 + t\alpha + z.$$

Его дискриминант равен $y^2 - 4xz < 0$, поэтому $f(\alpha)$ не имеет действительных корней. В силу первого неравенство системы $f(-2) = 4x - 2y + z > 0$, значит, $f(\alpha) > 0$ для всех действительных α. Остается заметить, что $f(0) = z$.

2–ое решение. Будем рассуждать от противного. Пусть $z \leqslant 0$. Случай $z = 0$ невозможен ввиду второго неравенства системы. Если $z < 0$, то из первого неравенства получим

$$4xz < (2y - z)z.$$

Тогда $y^2 < 4xz < 2zy - z^2$, т.е.$(z-y)^2 < 0$, что невозможно. Противоречие доказывает справедливость утверждения о том, что $z > 0$.

3. В Изумрудном городе — 2018 светофоров. В каждый момент времени любой из них горит красным, зеленым или желтым цветом. Страшила развлекается следующим образом. Он выбирает два любых светофора, и, если они горели разными цветами, то он переключает их так, чтобы они одинаково горели третьим оставшимся цветом. И наоборот, если они горели одинаковыми цветами, то он переключает их так, Чтобы они горели разными не совпадающими с исходным цветами. В начале развлечения ровно один светофор горел желтым цветом, а остальные - зеленым. Сможет ли Страшила переключить все светофоры на красный?

Решение. Сначала можно переключить 672 пар зеленых светофоров, чтобы получилось 672 красных и 672 желтых. Всего в Изумрудном городе помимо красных светофоров останется 673 зеленых светофора и, с учетом первоначально имевшегося желтого, 673 желтых светофора, которые можно парами переключить на красные. Следовательно, Страшила сможет справиться с поставленной задачей.

4. *В восьми коробках лежат апельсины: в первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, ..., в восьмой — 8. Чебурашка съедает каждый день ровно k апельсинов (k — натуральное число), причем, из каждой коробки он берет не более одного апельсина. Найдите все значения k, при которых Чебурашка сможет съесть все апельсины.*

Решение. Число дней, за которые Чебурашка сможет съесть все апельсины, не менее 8 (иначе не опустошить восьмую коробку), общее число апельсинов — 36, поэтому $k \leqslant \frac{36}{8}$, т.е. $k \leqslant 4$.

Для того, чтобы показать, что все такие натуральные k удовлетворяют условию задачи, распределим коробки в k групп так, чтобы апельсинов в каждой группе было поровну. Алгоритм поглощения апельсинов таков: *каждый день съедается по одному апельсину из каждой группы (не важно, из какой коробки).* Искомое распределение:

при $k = 4$	1–ая и 8–ая коробки; 2–ая и 7–ая коробки; 3–я и 6–ая коробки; 4–ая и 5–ая коробки
при $k = 3$	1–ая, 2–ая, 3–я и 6–ая коробки; 4–ая и 8–ая коробки; 7–ая и 5–ая коробки
при $k = 2$	1–ая, 8–ая, 2–ая и 7–ая коробки; 3–я, 6–ая, 4–ая и 5–ая коробки
при $k = 1$	единственная группа состоит из всех коробок.

5. *Известно, что уравнение* $x^3 + y^3 = z^3$ *не имеет решений в натуральных числах. Найдите все решения в натуральных числах уравнения*

$$6x^2 + 2 = z^3.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $(x+1)^3 - (x-1)^3 = z^3$, откуда $(x+1)^3 = (x-1)^3 + z^3$. В натуральных числах $x-1$, $x+1$ и z это уравнение решений не имеет (по условию задачи). Так как и z, и x (а значит и $x+1$) должны быть натуральными, единственный возможный случай — это случай $x - 1 = 0$, т.е. $x = 1$. Но тогда $z = 2$.

$\boxed{\textbf{Ответ: } x = 1, z = 2}$

10 класс

1. *В плоскости дано $n > 3$ точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Существует ли окружность, проходящая по крайней мере через три данные точки и не содержащая внутри себя ни одной из остальных?*

Решение. Возьмем пару точек (или одну из таких пар), расстояние между которыми наименьшее. Обозначим этим точки через a и B. Выберем из оставшихся третью точку C так, чтобы $\angle ACB$ был наибольшим. По условию точки A, B и C не лежат на одной прямой. Окружность, проведенная через точки A, B и C — искомая.

Докажем это. Угол ACB — острый (*на самом деле можно доказать, что $\angle ACB \leqslant 60°$*). В противном случае он был бы наибольшим углом в $\triangle ABC$ и, следовательно, $|AB| > |AC|$ и $|AB| > |CB|$, что противоречит выбору пары точек A и B.

Теперь будем рассуждать от противного. Предположим, что какая-то точка M лежит внутри круга.

`Случай I.` Точка M лежит внутри того же сегмента, что и точка C. Тогда $\angle AMB > \angle ACB$, что противоречит выбору точки C.

`Случай II.` Точка M лежит в другом сегменте. Тогда $\angle AMB$ тупой, что противоречит выбору точки C.

Таким образом, внутри круга данных точек нет. На самой окружности данные точки могут быть. Например, заданные точки являются вершинами правильного n–угольника.

2. *Существует ли натуральное число z, которое можно двумя различными способами записать в виде $z = x! + y!$, где x и y — натуральные числа, такие, что $x \leqslant y$?*

Решение. Пусть для натурального z имеются натуральные числа $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$ такие, что

$$z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2! \tag{1}$$

Без ограничения общности $x_1 < x_2$. Тогда не может быть $y_1 < x_2$, иначе

$$z = x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \leqslant x_2! + y_2! = z,$$

что невозможно. Поэтому,

$$y_1 \geqslant x_2.$$

Тогда для x_2 имеем:

$$x_2 \leqslant y_2, \quad x_2 \leqslant y_1.$$

Поэтому число

$$x_2! + y_2! - y_1!$$

делится на $x_2!$. Вследствие (1) число $x_1!$ также делится на $x_2!$, что противоречит предположению, что $0 < x_1 < x_2$. Таким образом, утверждение доказано.

3. *Найдите x, если*

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0,$$

где m — данное действительное число.

Решение. Значение x должно удовлетворять условиям:

$$\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1 \tag{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m \neq 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) эквивалентно альтернативе

1. $\sin 3x = -1$, а $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 1$, откуда $x = k \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ и $x = l \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$. Следовательно, $6l - 8k = 5$, что невозможно, левая часть четна, а правая — нечетна.

2. $\sin 3x = 1$, а $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1$. Тогда $x = k \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ и $x = l \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, откуда $4k = 3l + 1$ или $k - 1 = 3(l - k)$, следовательно $k = 1 + 3l$ (l — целое);

$$x = 2\pi l + \frac{5\pi}{6}.$$

Подставляя это значение x в (2), получаем условие $m \neq 2$.

$\boxed{\textbf{Ответ: } x = 2\pi l + \frac{5\pi}{6}, l \in \mathbb{Z}, m \neq 2}$

4. *Даны длины a, b, c сторон треугольника, площадь которого равна S. Докажите, что имеет место неравенство*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

При каком условии имеет место равенство?

Решение. По Формуле Герона площадь S треугольника равна

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}},$$

где все сомножители положительны. Поэтому для оценки произведения $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ можно применить неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

или

$$xyz \leqslant \frac{(x+y+z)^3}{27}.$$

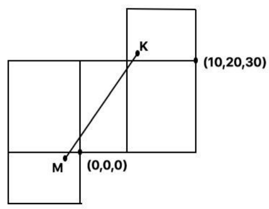
Положим $x = a+b-c, y = a+c-b, z = b+c-a$. Получим

$$4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{3a^2+3b^2+3x^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

причем знак равенства достигается при $a = b = c$. Что и требовалось доказать.

5. В прямоугольном спичечном коробке размерами $1 \times 2 \times 3$ см сидит муравей, и есть сахарная крошка. Если ввести систему координат с осями, параллельными ребрам коробка так, чтобы одна вершина коробка находилась в начале координат, а вторая в точке с координатами (10 мм, 20 мм, 30 мм) то муравей будет сидеть в точке с координатами (1 мм, 2 мм, 0 мм), а крошка будет в точке с координатами (9 мм, 3 мм, 30 мм). Каково кратчайшее расстояние, которое муравью придется проползти до сахарной крошки, если он может двигаться только по поверхности коробка?

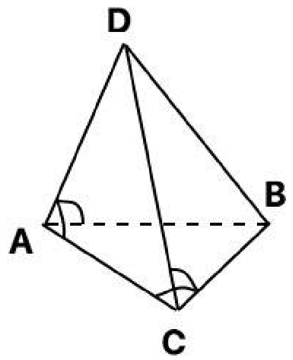
Решение. Рассмотрев различные развёртки куба несложно убедиться, что кратчайший путь от муравья (M) до сахарной крошки (K) будет проходить по гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $(2+10+3)$мм и $(1+30+1)$, откуда находим его длину $\sqrt{15^2+32^2} = \sqrt{1249}$.



11 класс

1. *Три грани тетраэдра — прямоугольные треугольники, а четвертая грань — не тупоугольный треугольник. Докажите, что необходимым и достаточным условием того, чтобы и четвертая грань была прямоугольным треугольником, является предложение, что ровно два из плоских углов при одной вершине тетраэдра — прямые.*

Решение. I. Пусть ровно два из плоских углов при вершине A — прямые, а именно $\angle CAD = \angle BAD = 90^\circ$ (см. рис.)



а) Пусть грань ABC — третий прямоугольный треугольник. По предположению $\angle BAC \neq 90^\circ$. Ввиду симметрии все равно, какой из оставшихся углов грани ABC прямой. Пусть $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда:

$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 = \\ = |AB|^2 + |AD|^2 = |DB|^2,$$

т.е. $\angle BCD = 90^\circ$.

б) Пусть грань BCD —третий прямоугольный треугольник . Если предположим, что $\angle BDC = 90^\circ$, то в этом случае легко установить, что $\triangle ABC$ — тупоугольный. (Например, так:

$$|BC|^2 = |CD|^2 + |DB|^2 = |DA|^2 + |AC|^2 + |AB|^2 + |DA|^2 > |AC|^2 + |AB|^2.)$$

Но по условию это невозможно.

Из-за симметрии все равно, какой из оставшихся двух углов прямой. Пусть $\angle BCD = 90^\circ$. Тогда:

$$|BC|^2 + |AC^2| = |BD|^2 - |DC|^2 + |AC|^2 = |BD|^2 - (|DC|^2 - |AC|^2) = \\ = |BD|^2 - |AD|^2 = |AB|^2,$$

т.е. $\angle ACB = 90^\circ$.

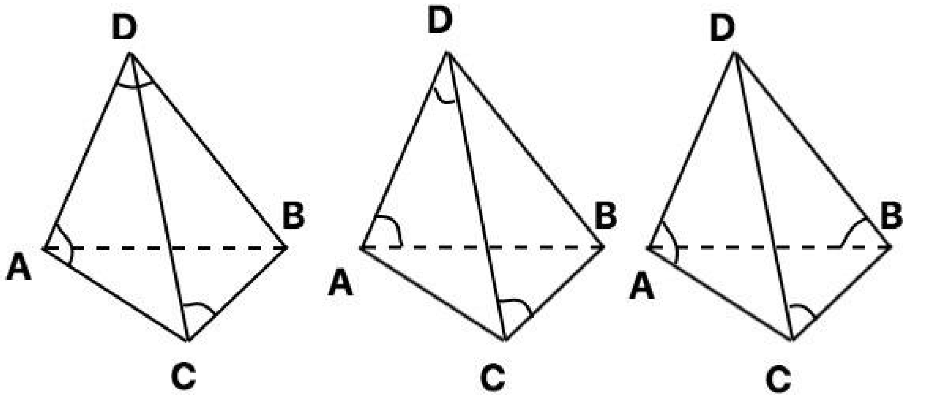
II. Пусть для каждой вершины тетраэдра $ABCD$ не выполнено условие, чтобы точно два из плоских углов при этой вершине были прямыми.

а) Если прямые углы трех прямоугольных треугольников сходятся в одной и той же вершине тетраэдра, то четвертая грань — прямоугольный треугольник.

Действительно, легко установить, что квадрат любого ребра четвертой грани меньше суммы квадратов двух оставшихся ребер.

б) Пусть прямые углы трех граней прямоугольных треугольников лежат у различных ребер тетраэдра.

Легко сообразить, что относительно взаимного расположения граней возможны лишь три существенно различных случая: $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, отмеченные на рисунке



$\delta_1)$ $\delta_2)$ $\delta_3)$

Если допустим, что случай δ_2 осуществим, получим, что любое ребро тетраэдра является катетом некоторого из прямоугольных треугольников и поэтому меньше какого-то другого ребра тетраэдра, что невозможно, если вспомнить, что среди них есть наибольшее (одно ищи несколько).

Остается рассмотреть случаи:

δ_1: $\angle CAD = \angle BCD = \angle BDA = 90°$;

δ_3: $\angle ACD = \angle BCD = \angle BAD = 90°$

Рассмотрим грань ABC.

Ввиду 1) $\angle BAC \neq 90°$ и $\angle ACB \neq 90 : \circ$. Допустим, что $\angle ABC = 90°$.

Для случая δ_1 имеем:

$$|AC| < |CD| < |DB| < |AB| < |AC|,$$

что невозможно.

Для случая δ_3 получим, что центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, должен совпадать с серединами ребер AC и BD, в то время как эти ребра эти ребра не имеют общих точек. Следовательно, $\triangle ABC$ не прямоугольный.

2. *Докажите, что если действительные числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *удовлетворяют неравенству*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)},$$

то все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *неотрицательны.*

Решение. 1) Докажем сначала, что для любого натурального k и произвольных действительных чисел $a_1, \ldots, a_k$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 \leqslant k(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2).$$

Будем рассуждать по индукции. База индукции при $k = 1$ очевидна. Сделаем шаг индукции. Пусть утверждение справедливо для k слагаемых. Докажем его для $k+1$ слагаемого.

$$\begin{gathered} N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1})^2 = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k). \end{gathered}$$

По предположению индукции в правой части последнего неравенства, получим:

$$\begin{aligned} N \leqslant k(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \\ = (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2) - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_k^2 - \\ - ka_{k+1}^2 + 2a_1a_{k+1} + 2a_2a_{k+1} + \ldots + 2a_ka_{k+1} = \\ = (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2) - (a_1 - a_{k+1})^2 - (a_2 - a_{k+1})^2 - \ldots \\ \ldots - (a_k - a_{k+1})^2, \end{aligned}$$

откуда и получается искомое неравенство.

2) Теперь займемся утверждением из условия задачи. Оно опять же очевидно при $k = 1$. Для $k = n-1$ по доказанному в 1) имеем:

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 1| \leqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь неравенство из условия задачи, получим:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \leqslant |a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}| \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

откуда следует вытекает, что $a_n \geqslant 0$. Теперь просто изменяя порядок нумерации чисел a_i можно аналогично показать, что любое $a_i \geqslant 0$.

3. *Для каждого значения параметра p решите уравнение*

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{p}$$

и укажите количество его решений для каждого значения параметра.

Решение. Заметим, что $p \neq 0$ и что если x — корень, то

$$\sin x \cdot \cos x \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения на $p \sin x \cos x$. Получаем:

$$p(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x$$

Введем обозначение $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. Поскольку

$$z^2 = \frac{1}{2}(1 + 2\sin x \cos x) = \sin x \cos x + \frac{1}{2},$$

исходное уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{2}pz = z^2 - \frac{1}{2}, \quad |z| \leqslant 1,\ p \neq 0$$

или

$$2z^2 - 2\sqrt{2}pz - 1 = 0, \quad |z| \leqslant 1,\ p \neq 0.$$

Отсюда находим, что

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + \sqrt{p^2+1}), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - \sqrt{p^2+1}),$$

и для любого действительного значения p, очевидно,

$$z_1 > 0 > z_2,$$

то есть, корни этого уравнения всегда различны и не равны нулю. Легко проверить что условие $z_1 \leqslant 1$ равносильно выполнению неравненства $p \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$, значит, при всех $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ существуют две серии решений

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= 2k\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(p + \sqrt{p^2+1})\right) - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_{2,k} &= (2k+1)\pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(p + \sqrt{p^2+1})\right) - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

которые при $p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ соединяются в одну $x_{1,k} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Аналогично, для второго корня должно выполняться условие $z_2 \geqslant -1$, или $p \geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, следовательно, при всех $p \in (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0) \cup (0, \infty)$ существует две серии решений

$$\begin{aligned} x_{3,k} &= 2k\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(p - \sqrt{p^2+1})\right) - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_{4,k} &= (2k+1)\pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(p - \sqrt{p^2+1})\right) - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

которые при $p = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ соединяются в серию $x_{3,k} = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, для каждого промежутка $2\pi k \leqslant x < 2\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеется два решения исходного уравнения при $|p| > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, три решения при $p = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, четыре решения при $0 < |p| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и при $p = 0$ решений нет.

4. *Определите цифры x, y и z, если известно, что равенство*

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{2n\ \text{цифр}} - \underbrace{\overline{yy\ldots y}}_{n\ \text{цифр}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots z}}_{n\ \text{цифр}}$$

имеет место по крайней мере для двух различных значений натурального числа n. Найдите все значения n, для которых это равенство остается справедливым.

Решение. Пусть n — любое натуральное число, для которого выполняется условие задачи. Тогда:

$$x \cdot \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{2n\ \text{цифр}} - y \cdot \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{n\ \text{цифр}} = z^2\,\underbrace{\overline{(11\ldots 1)}^2}_{n\ \text{цифр}} \tag{4}$$

Заметим, Что для любого натурального k

$$10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Тогда из (4) получим:

$$x \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - y \cdot \frac{10^n - 1}{9} = z^2 \cdot \frac{(10^n - 1)^2}{9^2}.$$

Сократив на $10^n - 1$ и избавившись от знаменателя, получаем:

$$9(10^n + 1)x - 9y = (10^n - 1)z^2,$$

или, что то же самое

$$(9x - z^2)10^n = 9y - 9x - z^2. \qquad (5)$$

Согласно условию, существуют натуральные числа $n_1 \neq n_2$, для которых выполнено (4), а, следовательно, (5), т.е.

$$(9x - z^2)10^{n_1} = 9y - 9x - z^2; \quad (9x - z^2)10^{n_2} = 9y - 9x - z^2.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$(9x - z^2)(10^{n_1} - 10^{n_2}) = 0.$$

Но, т.к. $10^{n_1} - 10^{n_2} \neq 0$, то

$$9x - z^2 = 0. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$9y - 9x - z^2 = 0. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$x = k^2, \quad y = 2k^2, \quad z = 3k, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Принимая во внимание, что $0 < x, y, z \leqslant 9$, получаем два решения:

$$\begin{array}{ccc} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 8 \\ z & 3 & 6. \end{array}$$

Если (x, y, z) — любое решение, то для каждого n выполнено (5), а, следовательно, (4). Иными словами, данное неравенство выполнено для любых натуральных n.

5. *Федора и Емеля получили на свадьбу 2018 коробок, в которых находится* $1, 2, 3, \ldots, 2018$ *конфет. Они решили сыграть в «жадину» по следующим правилам: каждый по очереди выбирает несколько непустых коробок, и съедает из каждой выбранной коробки по одной конфете. Кто съест последнюю конфету, тот будет объявлен жадиной. Емеля очень не хочет оказаться жадиной. Как он должен поступить: сделать, как глава семьи, ход первым, или же, как джентльмен, уступить первый ход Федоре? Обоснуйте ответ и приведите стратегию Емели, действуя согласно которой он гарантированно оставит Федору жадиной.*

Решение. Первым ходом Емеля может съесть по одной конфете из всех коробок с нечетным количеством конфет так, чтобы оставить Федоре только коробки с четным количеством конфет. После хода Федоры хотя бы в одной коробке окажется нечетное количество конфет, и Емеля всегда сможет сделать ход, востанавливающий четность во всех коробках. Заметим, что при такой стратегии Емели количество непустых коробок будет уменьшаться только во время хода Емели. В какой-то момент после хода Емели должно будет остаться не более одной коробки. В это ход Емеле надо изменить тактику: съесть конфеты так, чтобы осталась лишь одна коробка, и в этой оставшейся коробке оказалось нечетное количество конфет (очевидно, он всегда может выбрать - съесть или не съесть одну конфету из этой коробки). Тогда конфеты из этой оставшейся коробки Федора с Емелей будет есть по очереди, и последнюю съест Федора. Уступать Федоре первый ход нельзя, так как в таком случае она сможет применить эту же стратегию чтобы не остаться жадиной.