1 вариант

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Увлекательная варка пельменей

В кастрюлю высотой 10 см и радиусом 7 см наливается 1 литр кипящей воды. В нее бросают 25 пельменей (вес одного пельменя 15 г, плотность 1250 кг/м^3). Затем кастрюлю плотно накрывают крышкой массой 300 г. Пельмени варятся при постоянной температуре. Процесс варки останавливается, когда давление внутри будет меньше атмосферного на 1% (1 атм = 101 325 Па). Считая водяной пар идеальным газом, оцените высоту, на которую можно поднять 1 пельмень за счет совершаемой в процессе варки работы водного пара? Температурная зависимость плотности водяного пара представлена в таблице.

Температура, ^oC	Плотность, кг/м^3
0	0,00484
20	0,01729
40	0,05114
60	0,1301
80	0,2929
100	0,5970

Решение: В условиях задачи сказано, что варка происходит при постоянной температуре (100 ^oC т.к. вода кипит). Поэтому работу, совершаемую идеальным газом можно оценить по формуле:

$$A = \nu \times R \times T \times ln(\frac{p1}{p2})$$

Здесь, ν – количество вещества, R – универсальная газовая постоянная (8,314), T – температура (в Кельвинах), $p1$ – давление в начале варки, $p2$ – давление в конце варки.

$$\nu = \frac{m_{\text{вп}}}{M_{\text{вп}}}$$

$$M_{\text{вп}} = M(H_20) = 2 \times 1 + 16 = 18 \text{ г/моль}$$

$$m_{\text{вп}} = \rho_{\text{вп}} \times V_{\text{вп}}$$

$$V_{\text{вп}} = V_{\text{кастр}} - (V_{\text{воды}} + V_{\text{пельменей}})$$

$$V_{\text{кастр}} = h \times \pi \times r^2 = 0{,}1 \times (0{,}07)^2 \times 3{,}14 = 0{,}00153 \text{ м}^3$$

$$V_{\text{воды}} = 1/1000 = 0{,}001 \text{ м}^3$$

$$V_{\text{пельменей}} = N \times \frac{m_{\text{пельменей}}}{\rho_{\text{пельменей}}} = 25 \times \frac{0{,}015}{1250} = 0{,}0003 \text{ м}^3$$

$$V_{\text{вп}} = 0{,}00153 - 0{,}001 - 0{,}0003 \ = 0{,}00023 \text{ м}^3$$

$$m_{\text{вп}} = 0{,}5970 \times 1000 \times 0{,}00023 = 0{,}142 \text{ г}$$

$p1$ определяется атмосферным давлением и добавочным давлением за счет крышки, которое можно определить из следующего соотношения

$$\Delta p \times S = m \times g$$

$$\Delta p = \frac{m*g}{S} = (0{,}3 \times 9{,}8)/(3{,}14 \times (0{,}07)^2) = 190 \text{ Па}$$

$$A = \frac{0{,}142}{18} * 8{,}314 * 373 * ln\left(\frac{101\,325+190}{0{,}99*101\,325}\right) = 0{,}175 \text{ Дж}$$

Для того чтобы поднять пельмень, необходимо совершить работу против силы тяжести

$$A = F * H = mg * H$$

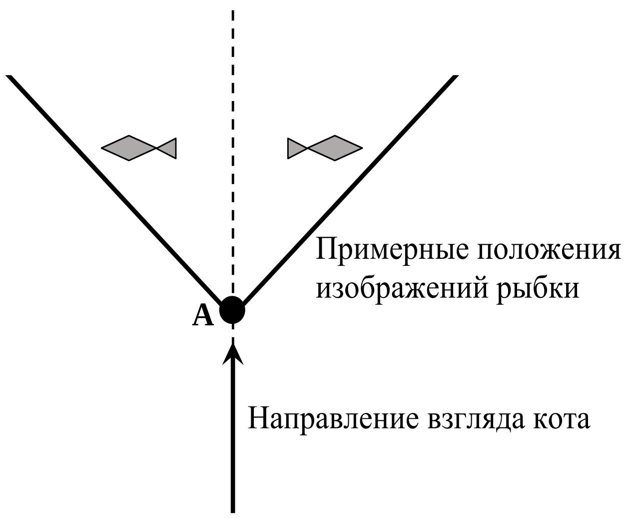
$$H = \frac{A}{mg} = \frac{0{,}175}{0{,}015*9{,}8} = 1{,}19 \text{ м}$$

Оценка

Проведена оценка добавочного давления крышкой	5
Найден объем водного пара	5
Найдена работа, совершаемая водным паром	5
Получен окончательный ответ	5

Задание 2. (20 баллов) Три рыбки

Кот наблюдает за рыбкой, живущей в большом прямоугольном аквариуме (см. рисунок, где показан вид сверху). Рыбка находится сначала на дне в самом углу (точка А), заметив кота, она отплывает подальше вглубь аквариума, оставаясь у дна. Когда взгляд кота направлен параллельно дну аквариума (то есть, параллельно плоскости рисунка), он видит два изображения рыбки, симметрично удаляющиеся друг от друга.



Расстояние между изображениями увеличивается с ускорением 1,0 см/с². Насколько долго должен ждать кот, прежде чем заглянуть в аквариум сверху, если он хочет увидеть ещё одно изображение рыбки? Максимальный доступный коту угол между направлением взгляда и поверхностью воды составляет 30°, глубина воды в аквариуме равна 40 см. Считать, что изображения рыбки формируются лучами, параллельными направлению взгляда кота. Показатель преломления воды принять равным 4/3. При решении можно использовать калькулятор.

Решение: Если изображения рыбки формируются лучами, параллельными взгляду кота, то относительно «настоящей» рыбки они будут расположены так, как показано на Рисунке 1:

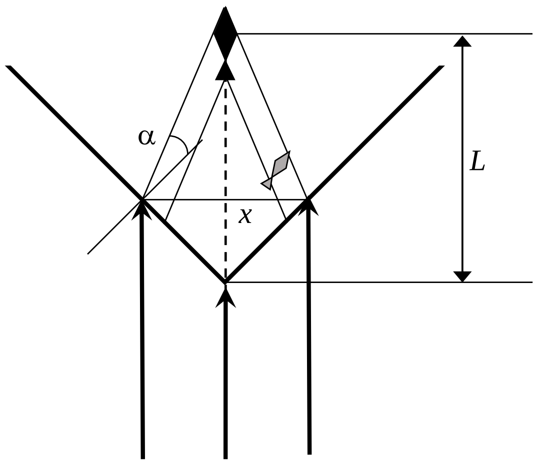


Рисунок 1. Определение расстояния до рыбки исходя из положения изображений

Определять кажущееся расстояние от стенок аквариума до изображений рыбки в задаче не нужно, так как расстояние между изображениями x от него не зависит. Оно связано с расстоянием до рыбки L и определяется из закона преломления следующим образом:

$$n \cdot \sin\alpha = \sin 45^o \Longrightarrow si\,n\,\alpha = \frac{\sin 45^o}{n} = 0{,}53033,\ \ \alpha = arc\sin 0{,}53033 = 32^o \qquad (1)$$

$$L = \frac{x}{2}\cdot\left(1 + tg\left(\alpha + 45^{\circ}\right)\right) = 2.67\cdot x\,. \qquad (2)$$

Далее, для того, чтобы кот мог увидеть рыбку сверху, расстояние до неё от вертикальной границы аквариума должно быть не меньшим, чем показано на Рисунке 2. Поскольку стенки аквариума вдоль перпендикуляров к рыбке ближе, чем угол, обсуждаемое расстояние совпадает с величиной L.

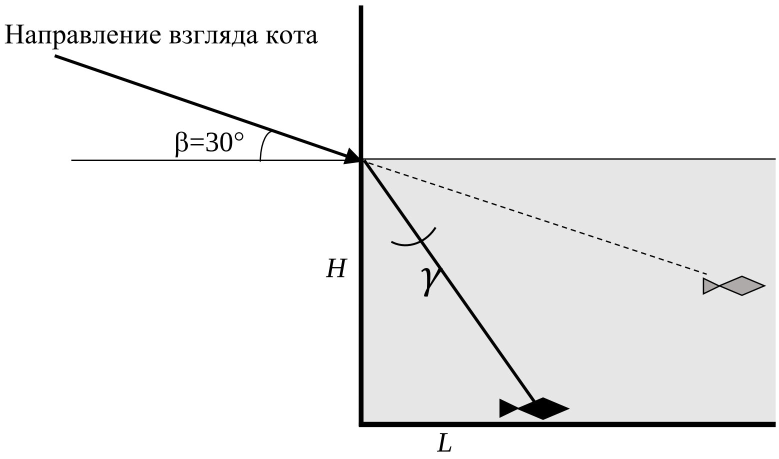


Рисунок 2. Изображение рыбки, видимое котом сверху

Построение на Рисунке 2 показывает, что

$$n\cdot\frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}}=\sin\left(90^o-30^o\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$
$$L=H\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(n^2-\frac{3}{4}\right)^{-1/2}=34.17\ см \quad (3)$$

Идентичное значение можно получить, если рассмотреть прямоугольный треугольник с катетами H и L, где

$L=H\cdot\tan\gamma=H\cdot\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}=34{,}17$ см, причем $\sin\gamma=\frac{\sin(90^o-\beta)}{n}$.

Если бы рыбка находилась ближе к стенкам аквариума, то лучи от неё выходили бы через горизонтальную поверхность воды под углами, большими, чем 30°. Соответствующее формуле (3) значение $x(t)$ получается равным 12,80 см. Если расстояние между изображениями увеличивалось с постоянным ускорением a = 1,0 см/с^2, то на это потребовалось время

$$t=\sqrt{\frac{2x}{a}}=5.06\ \text{с}. \quad (4)$$

Ответ: кот сможет увидеть третье изображение рыбки через 5.06 с.

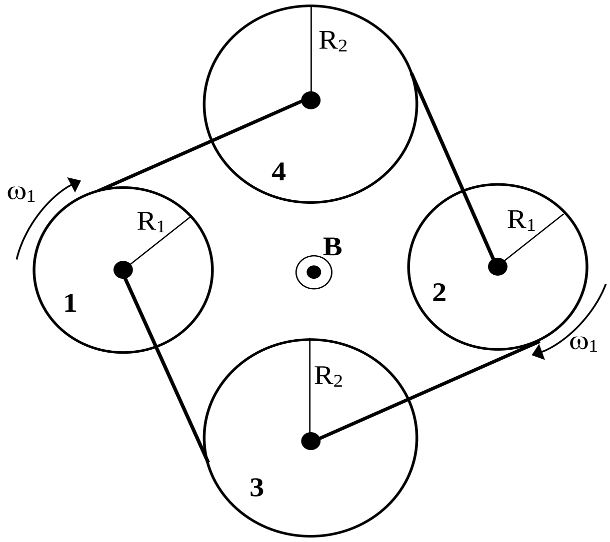
Оценка

Рассмотрен закон преломления света	2
Установлена связь между истинным положением рыбки и расстоянием между её изображениями	8
Получено значение расстояния, на которое должна удалиться рыбка от стенок аквариума для того, чтобы кот мог увидеть её через горизонтальную поверхность воды	4
Получен ответ задачи	6

Задание 3. (20 баллов) Четыре диска

На рисунке изображены проводящие диски, размещенные в перпендикулярном плоскости рисунка магнитном поле (вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен вверх). Два диска радиуса R_1 вращаются внешними силами в одном и том же направлении (показаны стрелками). Центры и края дисков соединены проводниками (см. рисунок), силами трения в области контактов можно пренебречь.

С какими угловыми скоростями должны вращаться диски 3 и 4 для того, чтобы в системе не было электрических токов? Положительным считать направление вращения против часовой стрелки. Электрическими сопротивлениями пренебречь.



Решение: На вращающиеся положительные заряды в дисках 1, 2 действует сила Лоренца

$$F_{1,2} = q \cdot \left(\omega_{1,2} r\right) \cdot B\,, \quad (1)$$

направленная к центру дисков. На электроны сила Лоренца действует в противоположном направлении, так что плотность электронов в центрах дисков уменьшается, а на краях – увеличивается. Устанавливается некоторое стационарное распределение заряда от края к центру. В результате возникает электрическое поле, действующее на заряды противоположно силе Лоренца (так что дальнейшее перераспределение зарядов прекращается)

Поскольку это распределение стационарно, можно считать, что на заряды действует некоторая дополнительная сила, противоположная силе Лоренца, которая препятствует дальнейшему разделению зарядов. Эту силу можно определить через производную потенциальной энергии заряда по радиусу:

$$F_{эл} = -q\frac{d\varphi(r)}{dr}\,, \qquad (2)$$

где $\varphi(r)$ – потенциал электрического поля, соответствующий силе $F_{эл}$. Для того, чтобы сила F была противоположна силе Лоренца, потенциал $\varphi(r)$ должен рассчитываться по формуле

Отметим, что возможно рассмотрение интеграла силы Лоренца вдоль некоторого пути l, по которому электрон движется от центра диска на край:

$$\int_a^b \left(\frac{\vec{F}_{1,2}}{q}\right) \cdot d\vec{l}\,, \quad (3)$$

где $d\vec{l}$ - вектор элементарного перемещения вдоль пути l. Интеграл (3) не зависит от формы пути, поскольку сила Лоренца везде направлена радиально, так что его можно брать вдоль радиуса. Однако, формально интеграл (3) нельзя считать электродвижущей силой, поскольку сила Лоренца не совершает работы.

Таким образом, считаем потенциал стационарного электрического поля, возникающего в дисках, интегрируя соотношение (2), в котором полагаем силу $F_{эл}$ противоположной силе Лоренца (1):

$$\varphi_{1,2}(r) = -\int_0^r \frac{F_{эл}(r)}{q} \cdot dr = -\int_0^r \frac{q \cdot \left(\omega_{1,2} r\right) \cdot B}{q} = -\frac{\omega_{1,2} r^2 B}{2}\,. \quad (4)$$

Определение знака в формуле (4) из теоретических соображений может быть для школьников трудным, однако есть физические соображения: знак соответствует характеру распределения зарядов. Если в центре диска есть избыток положительного заряда, то и потенциал там (с учётом знака) должен быть выше, чем на периферии. Получается, что в центре дисков потенциал $\varphi(r)$ равен нулю, а на внешних краях

$$\varphi_{1,2}\left(R_1\right) = -\frac{\omega_{1,2}R_1^2B}{2}. \qquad (5)$$

Для того, чтобы в цепи не было тока, диски 3 и 4 должны вращаться так, чтобы создать потенциалы противоположного знака, равные по модулю потенциалам $\varphi_{1,2}$. Отсюда

$$\left|\frac{\omega_{1,2}R_1^2B}{2}\right| = \frac{\omega_{3,4}R_2^2B}{2} \Rightarrow \omega_{3,4} = -\omega_{1,2}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2. \qquad (6)$$

Ответ: $\omega_{3,4} = -\omega_{1,2}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$

Оценка

Рассмотрена сила Лоренца в форме (1)	3
Введён потенциал электрического поля в форме (2)	5
Получен потенциал электрического поля в форме (5) (предлагаю считать правильным решением также расчёт ЭДС в дисках путём подстановки силы Лоренца в интеграл (3), если знак ЭДС с учётом физического содержания задачи определён верно; при условии получения формулы, аналогичной (5), оценивать этот результат в 13 баллов, по сумме текущей и предыдущей строк данной таблицы)	8
Указано, что диски 3 и 4 должны вращаться противоположно дискам 1 и 2	2
Получен ответ задачи	2

Задание 4. (20 баллов) Зерносушилка

Зерносушилка продвигает зерно на ленте транспортёра, при этом зерно нагревается от 15 до 65 °С. Сколько инфракрасных фотонов требуется для просушки 1 кг зерна? Удельная теплоёмкость зерна равна 1,54 кДж/кг×°С, частота инфракрасного излучения 400 ТГ, сушилка имеет КПД 80 %, постоянная Планка 6,626×10⁻³⁴ Дж×с.

Решение: 1) На нагрев зерна необходимо $Q = cm\Delta t$, на нагрев 1 кг требуется $Q_1 = c\Delta t$. $\text{КПД} = \frac{Q_1}{A_{\text{сушилки}}}$, откуда $A_{\text{сушилки}} = \frac{Q_1}{\text{КПД}} = \frac{c\Delta t}{\text{КПД}}$.

2) Работа z фотонов: $A_{\text{фотонов}} = zh\nu$.

3) В данном случае вся работа по нагреву зерна (с учетом КПД) совершалась благодаря фотонному излучению $A_{\text{сушилки}} = A_{\text{фотонов}}$, следовательно, $\frac{c\Delta t}{\text{КПД}} = zh\nu$,

$$z = \frac{c\Delta t}{\text{КПД}\times h\nu} = \frac{10^3\times 1{,}54\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^\text{o}\text{C}}\ (65-15)^\text{o}\text{C}}{0{,}8\times 6{,}626\times 10^{-34}\text{Дж}\cdot\text{с}\times 400\times 10^{12}\text{Гц}}$$

$$= \frac{10^3\times 1{,}54\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^\text{o}\text{C}}\ (65-15)^\text{o}\text{C}}{0{,}8\times 6{,}626\times 10^{-34}\text{Дж}\cdot\text{с}\times 400\times 10^{12}\text{Гц}} = 3{,}63\times 10^{23}\text{штук/кг}$$

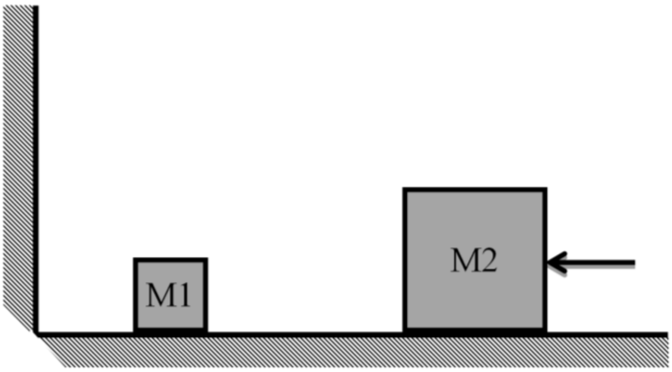
Ответ: $3{,}63\times 10^{23}\text{штук/кг}$

Оценка

Найдено количество теплоты, которую нужно подводить к зерну	4
Найдена работа, которую нужно совершать над зерном	4
Приведена формула для работы, совершаемой потоком фотоном	4
Получена общая формула из пункта 3	4
Получен окончательный ответ	4

Задание 5. (20 баллов) Квадрат и стучит

На идеально гладкой поверхности стоят два кубика. Большой кубик толкают в сторону маленького. Оцените количество соударений (считать как соударения между кубиками, так и соударения маленького кубика со стенкой), если масса *M1* равна 2 кг, а массы *M2* варьируются и представлены последовательностью (3, 15, 45, 55, 110 кг). Соударения считать абсолютно упругими.



Решение: Кинематика двух кубиков описывается законом сохранения энергии и законом сохранения импульса:

$$\frac{1}{2}M_1(v_1)^2+\frac{1}{2}M_2(v_2)^2=const$$

$$M_1v_1+M_2v_2=const$$

Стоит отметить, что закон сохранения энергии справедлив для любого момента времени, в то время как закон сохранения импульса выполняется в случае соударения между кубиками.

Сделаем замену переменных

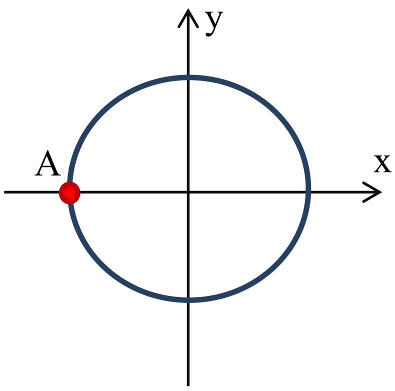
$$y=\sqrt{M_1}v_1$$

$$x=\sqrt{M_2}v_2$$

Тогда закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)=const$$

Это – уравнение окружности. Визуализируем закон сохранения энергии для этой системы в начальный момент времени.

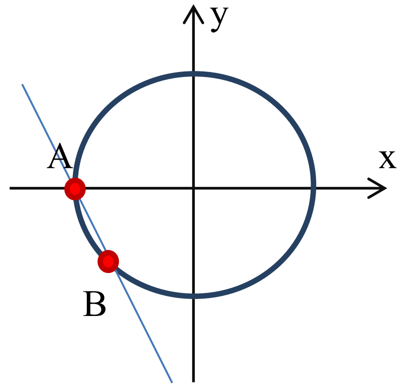


В начальный момент времени маленький куб покоится (координата *y* равна 0), а скорость большого кубика направлена слева направо (отрицательное значение координаты *x*).

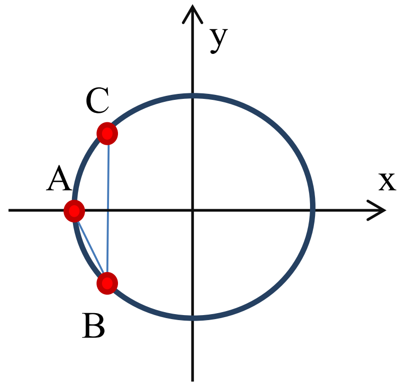
При соударении кубиков произойдет перераспределение скоростей согласно закону сохранения импульсов, который в новых переменных запишется следующим образом

$$\sqrt{M_1}y+\sqrt{M_2}x=const$$

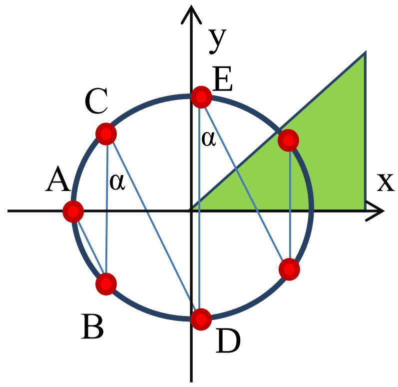
Это – уравнение прямой, коэффициент наклона которой определяется соотношением масс $-\frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$. Для того, чтобы определить скорости кубиков после соударения, необходимо провести эту прямую через точку А, которая описывает скорости кубиков до соударения. Точка В, являющаяся второй точкой пересечения окружности и прямой, будет описывать скорости кубиков после соударения.



После соударения маленький кубик начнет движение в сторону стенки и, в скором времени столкнется с ней. С учетом того, что соударения упругие, то соударения маленького кубика со стенкой пройдет без потери скорости – поменяется только направление вектора скорости. На графике это выразится переходом из точки B в точку C.



Далее кубики будут двигаться навстречу другу до соударения и перераспределения скоростей (линия CD), маленький кубик начнет движение в сторону стены (линия DE) и т.д.



Соударения будут происходить до тех пор, пока мы не попадем в сектор обозначенный зеленым цветом: в нем скорость маленького кубика меньше скорости большого, тем самым маленький кубик уже не «догонит» большой после соударения со стенкой.

Таким образом, задача подсчета числа соударений сводится к подсчету числа «переходов» на окружности до попадания в зеленый сектор.

Можно заметить, что длины дуг (AB, AC, BD, CE, DE…) равны. Они равны, поскольку углы, которые на них опираются, образованы вертикальными прямыми и прямыми, коэффициент наклона которых равен и определяется законом сохранения импульса. Суммарная длина всех дуг не должна превышать 2π (иначе мы «проскочим» зеленый сектор).

Воспользуемся теоремой о вписанном угле. Размер угла можно оценить по тангенсу угла наклона прямой CD. Тангенс можно вычислить, зная обратную величину коэффициента наклона, который определяется соотношением масс $-\frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$. Таким образом, угол α равен $\arctan(\frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_2}})$. При этом длина дуги будет равна 2α.

Получили, что число соударений равно такому наибольшему натуральному числу *N*, при котором продолжает выполняться неравенство

$$N * 2\alpha < 2\pi$$

Или

$$N * \arctan(\frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_2}}) . < \pi$$

Число *N* можно оценить, взяв целую часть отношения $\frac{\pi}{\arctan\left(\frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_2}}\right)}$.

Значения тангенсов угла α, отношения и числа *N*, для разных значений масс большого кубика, представлены в таблице

M_2	arctan (α)	π/ arctan (α)	N
3	0,684719	4,588147433	**4**
15	0,350106	8,97326709	**8**
45	0,207776	15,12009372	**15**
55	0,18843	16,67244322	**16**
110	0,134032	23,43920059	**23**

Ответ:

Оценка

Упомянуты законы сохранения энергии и импульса в контексте решаемой задачи	5
Визуализирован пример взаимодействия кубиков в пространстве x, y	5
Получена расчетная формула числа соударений	5
Получен окончательный ответ (по 1 баллу за каждый ответ)	5

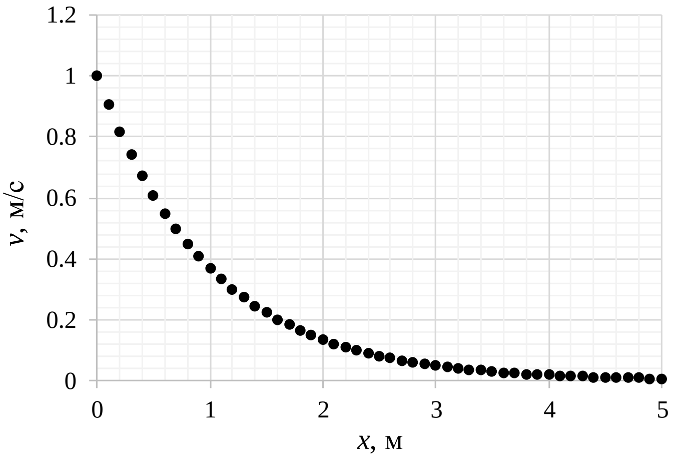
2 вариант

Задание 1. (20 баллов) Ускорение

На рисунке представлен график зависимости скорости материальной точки от координаты, представляющий собой функцию

$$v(x) = e^{-x}, \text{ м/с}. \qquad (1)$$

Оценить (либо рассчитать строго) ускорение этой материальной точки при *x* = 1.



Зависимость скорости материальной точки от координаты.

Решение: Приближённо задача может быть решена с использованием сетки на графике путём оценки малых приращений координаты и скорости:

$$a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}, \Delta t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot v. \qquad (2)$$

Здесь скорость $v \approx 0.37$ можно определить по графику в точке $x = 1$, в окрестности этой же точки нужно измерить приращения координаты и скорости, которые выбрать малыми и соответствующими друг другу.

Строго задача решается заменой малых приращений дифференциалами, так что

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = -e^{-x} \cdot e^{-x} = -e^{-2x} = -0.135\ м/с^2. \qquad (3)$$

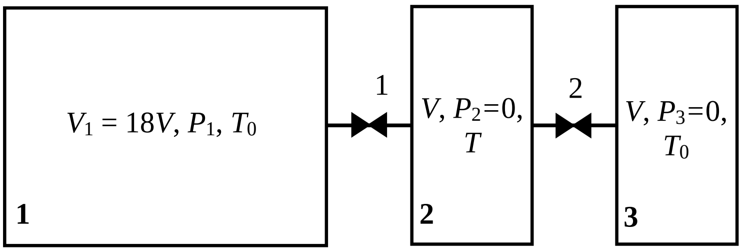
Ответ: $a(t) = -0.135\ м/с^2$.

Оценка

Указано, что ускорение может быть рассчитано как отношение малых приращений скорости и времени (либо как производная скорости по времени)	4
Получены представление ускорения через малые приращения скорости и координаты (формула (2)) либо аналог в дифференциальной форме	10
Получен строгий либо приближенный (рассчитанный с использованием конечных приращений) ответ задачи.	6

Задание 2. (20 баллов) Экономичный расход газа

На рисунке изображены три объёма. Объёмы 2 и 3 одинаковы, тогда как объём 1 – в 18 раз больше. В первом объёме находится идеальный газ при давлении P_1 = 4 МПа, объёмы 2 и 3 можно считать пустыми.



Задачей экспериментатора является получение давления P_3 = 6 Мпа в объёме 3. При этом объёмы 1 и 3 всегда имеют комнатную температуру T_0 = 298 К, изменить которую нельзя. С другой стороны, температуру объёма 2 можно контролируемо варьировать в диапазоне от 80 К (температура жидкого азота) до комнатной температуры. Вентили 1 и 2 можно открывать и закрывать в любом порядке. Считать, что открывание вентиля всегда приводит к выравниванию давлений в объёмах. Предложить любую последовательность допустимых действий, которая позволит получить в объёме 3 давление P_3 = 6 МПа.

Решение: Получить газ в Объеме 3 можно только из Объёма 2. При соединении этих объемов (вентиль 2 открыт) будет выполнено условие

$$P_2^/ = P_3^/,$$

в результате чего равенство Объёмов 2 и 3 даст соотношение

$$\nu_2^/ RT_2^/ = \nu_3^/ RT_3^/,$$

где $\nu_2^/, \nu_3^/$ – количества вещества в объёмах после соединения, R – универсальная газовая постоянная. Наименьшее количество вещества в Объёме 2 останется при наибольшей температуре $T_2^/$, так что соединять Объёмы 2 и 3 лучше при комнатной температуре ($T_2^/ = T_3^/ = T_0 = 298$ K).

Теперь, пусть ν_2 - количество вещества в Объёме 2 перед объединением с Объёмом 3, удовлетворяющее условию

$$\nu_2 = \nu_2' + \nu_3',$$

откуда

$$\nu_2 = 2\cdot\nu_3' = \frac{2P_3'V}{RT_0}, \qquad (1)$$

Далее, в Объем 2 вещество должно поступить из Объёма 1. Давление при соединении этих объёмов будет не больше, чем P_1 = 4 Мпа, так что при комнатной температуре в Объём 2 не поступит количество вещества, достаточного для получения 6 Мпа в Объёме 3. Таким образом, при соединении Объёмов 1 и 2 температура Объема 2 T_2 должна быть ниже комнатной.

Если P_1 = 4 Мпа – исходное давление в Объеме 1, а ν_1, ν_2, P_2 - количества вещества и давление в объёмах после соединения, то будут выполняться следующие соотношения:

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{P_1V_1}{RT_0},$$

$$P_2 = \frac{\nu_2 RT_2}{V_2} = \frac{\nu_1 RT_1}{V_1}, T_1 = T_0 \Rightarrow \nu_1 = \frac{T_2V_1}{T_0V_2}\nu_2 \Rightarrow$$

$$\nu_2 \cdot \left(\frac{T_2V_1}{T_0V_2} + 1\right) = \frac{P_1V_1}{RT_0}.$$

Учитывая равенство (1), определяем температуру T_2, которую должен иметь Объём 2 при соединении с Объёмом 1:

$$\frac{2P_3V}{RT_0}\cdot\left(\frac{T_2V_1}{T_0V} + 1\right) = \frac{P_1V_1}{RT_0} \Rightarrow \left(T_2V_1 + T_0V\right) = \frac{P_1V_1}{2P_3V}T_0V \Rightarrow$$

$$T_2 = T_0\frac{V}{V_1}\cdot\left(\frac{P_1V_1}{2P_3V} - 1\right) = \frac{5}{18}T_0 = 82.8\ \text{K}.$$

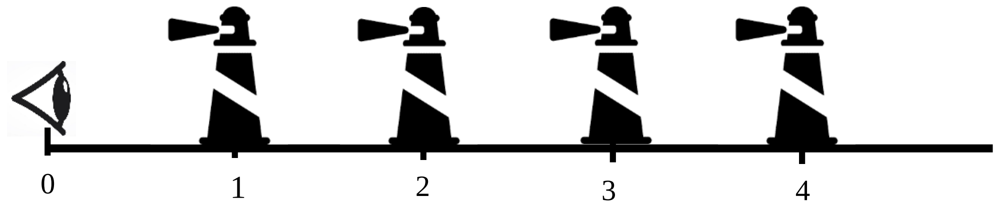
Ответ: Порядок действий может быть следующим: охладить Объём 2 до температуры T_2 = 82.8 K, соединить с Объёмом 1, после установления равновесия вентиль 1 закрыть (разъединить объёмы), затем Объём 2 нагреть до комнатной температуры, после чего соединить его с Объёмом 3.

Оценка

Использованы термическое уравнение состояния идеального газа либо его следствия в любой форме, позволяющей решить задачу	2
Учтён факт сохранения суммарного количества вещества при объединении двух объемов	3
Показано, что Объём 2 в процессе эксперимента должен быть охлаждён	3
Предложен конкретный алгоритм последовательного объединения, охлаждения и нагревания объёмов, позволяющий решить задачу	7
Рассчитаны необходимые температуры Объёма 2	5

Задание 3. (20 баллов) Периодически на маяках

Докажите, что общая яркость бесконечной системы из одинаковых маяков, воспринимаемая наблюдателем, находящимся в начале системы координат, равна $\pi^2/6$, если один маяк, находящийся в точке с координатой 1 воспринимается наблюдателем, как маяк с единичной яркостью.



***Примечание**: при решении этой задачи вам поможет знание обратной теоремы Пифагора и закона обратных квадратов.*

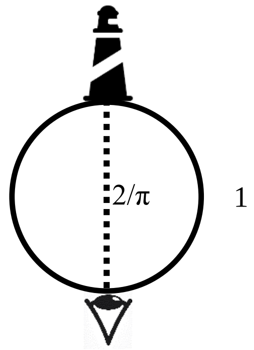
Решение: Так как маятник, находящийся на расстоянии 1 воспринимается с единичной яркостью, то можно положить, что яркость *I*, равна

$I = \frac{1}{r^2}$; где *r* – расстояние до наблюдателя.

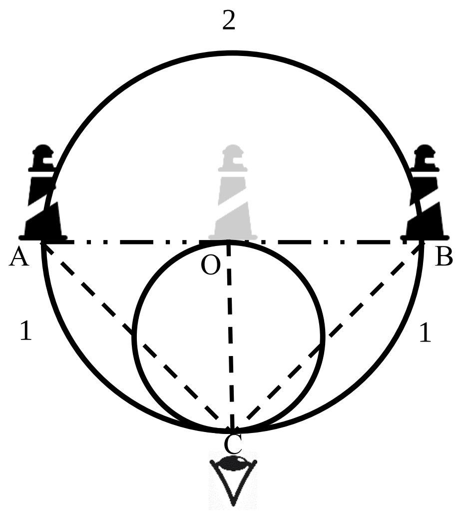
Таким образом, задача сводится к вычислению следующей суммы:

$$I_{\text{полн}} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Рассмотрим окружность, длина которой равна 2. Диаметр такой окружности равен $2/_{\pi}$. Если наблюдатель стоит напротив одного маяка, то воспринимаемая яркость равна $\pi^2/_4$.



Нарисуем окружность, диаметр которой в два раза больше исходной. Проведем диаметр, проходящий через маяк. На концах диаметра разместим два маяка.

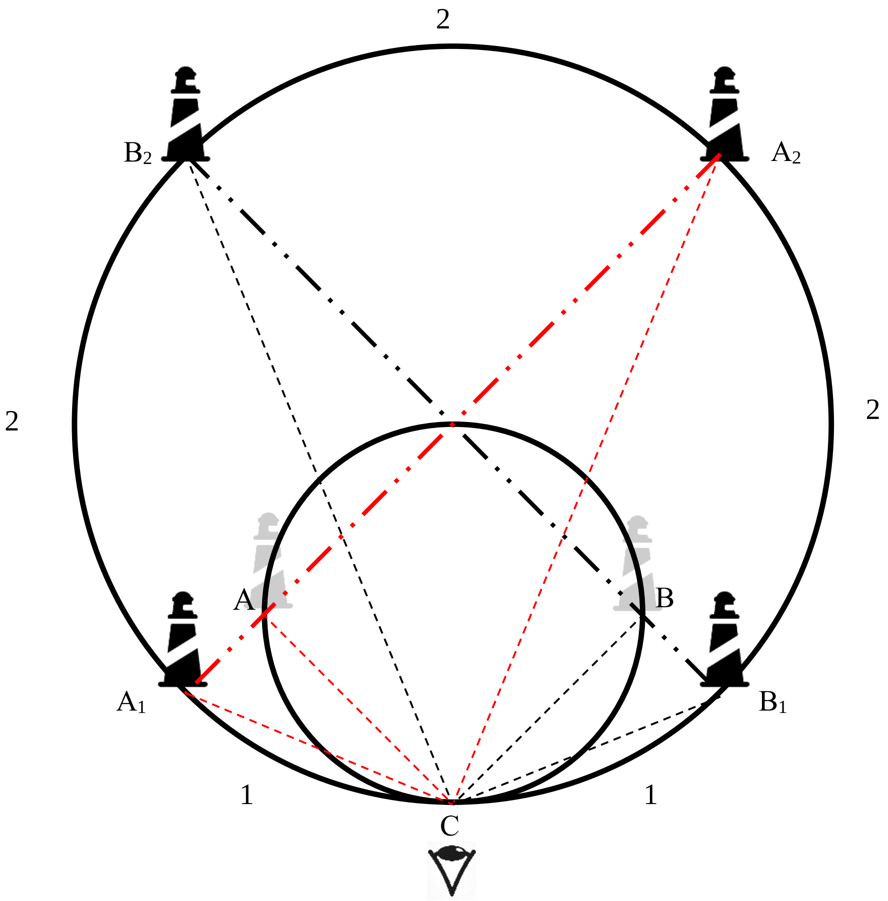


В прямоугольном треугольнике ABC (это прямоугольный треугольник, потому что он опирается на диаметр), CO – высота проведенная к гипотенузе. Согласно обратной теореме Пифагора:

$$\frac{1}{(\mathrm{OC})^2} = \frac{1}{(\mathrm{AC})^2} + \frac{1}{(\mathrm{BC})^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Таким образом, полученная система из двух маяков воспринимается наблюдателем с той же яркостью, что и исходная.

Повторим операцию. Нарисуем окружность, диаметр которой в два раза больше исходной. Проведем диаметры, проходящие через маяки. На концах диаметров разместим два новых маяка.



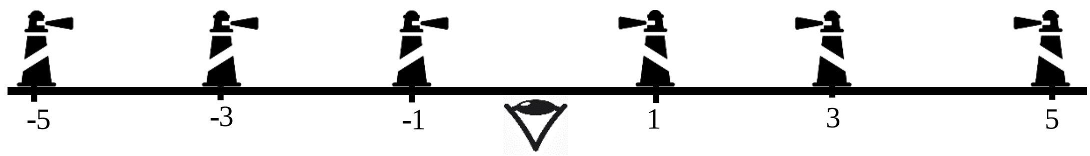
Треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 прямоугольные (поскольку опираются на диаметры окружности) и в них также применима обратная теорема Пифагора

$$\frac{1}{(AC)^2} = \frac{1}{(A_1C)^2} + \frac{1}{(A_2C)^2}$$

$$\frac{1}{(BC)^2} = \frac{1}{(B_1C)^2} + \frac{1}{(B_2C)^2}$$

Поэтому воспринимая наблюдателем яркость новой системы из 4 маяков будет также равна $\pi^2/4$.

Повторим подобную операцию большое число раз. При повторении подобной операции, для наблюдателя окружность будет казаться все более плоской и сведется к следующей системе.



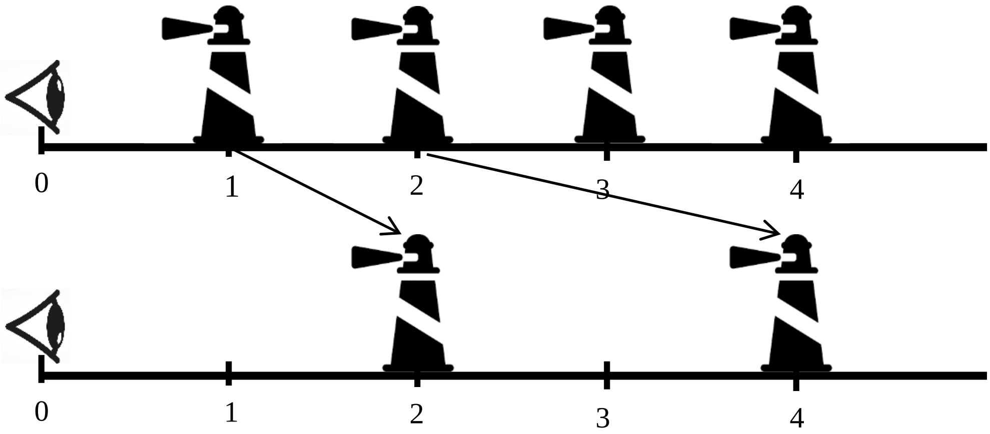
Общая яркость будет оставаться исходной $\pi^2/4$. Поэтому в предельном случае можно записать

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{(-7)^2} + \cdots$$

Для решения поставленной задачи достаточно оставить маяки с «одной» стороны. Очевидно, что на них приходится половина воспринимаемой наблюдателем яркости

$$I_{\text{неч}} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

Полученная сумма является суммой всех нечетных обратных квадратов. Для получения искомой необходимо знать сумму четных обратных квадратов.



Можно заметить, что система маяков, находящихся в четных координатах, является отмасштабированной версией изначальной системы: каждый маяк передвинут на расстояние равное удвоенной координате. Полная яркость такой системы будет в четыре раза меньше яркости исходной системы (из-за закона обратных квадратов).
Таким образом:

$$I_{\text{полн}} = I_{\text{неч}} + I_{\text{чет}} = I_{\text{неч}} + \frac{1}{4} * I_{\text{полн}}$$

$$\frac{3}{4} * I_{\text{полн}} = I_{\text{неч}}$$

$$I_{\text{полн}} = \frac{4}{3} * I_{\text{неч}} = \frac{4}{3} * \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Оценка

Сформулирована задача в явном виде	5
Оценена сумма нечетных элементов	5
Оценена сумма четных элементов	5
Получен окончательный ответ	5

Задание 4. (20 баллов) Капля масла

Капелька массой 3×10^{-12} кг сконденсировалась на расстоянии 0,5 см над горизонтально расположенной пластиной, имеющей поверхностную плотность заряда того же знака $\sigma = 2\times10^{-7}$ Кл/м^2 и площадь 1,6 см^2. Отлетев вверх, она начала совершать затухающие колебания, теряя заряд. За один период амплитуда колебаний уменьшалась на 10%. Найдите, через какое время капля начнёт совершать колебание с амплитудой вдвое меньше первоначальной. Заряд капли 3×10^{-15} Кл.

Решение: 1. Найдём ускорение, с которым капля начала двигаться:

$$m \times a = F_{\text{кул}} - F_{\text{тяж}}$$

$$a = \frac{1}{m} \times \left(\frac{kqQ}{h_1^2} - mg\right) = \frac{1}{m} \times \left(\frac{kq\sigma S}{h_1^2} - mg\right)$$

$$= \frac{1}{3\times10^{-12}\text{кг}} \times \left(\frac{9\times10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2} \times 3\times10^{-15}\text{Кл} \times 2\times10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \times 1{,}6\times10^{-4}\text{м}^2}{(0{,}5\times10^{-2}\text{м})^2} - 3 \times 10^{-12}\text{кг} \times 9{,}8\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right) = 1,72\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

2. Найдём положение равновесия капли:

$$F_{\text{кул}} = F_{\text{тяж}} \to \frac{kq\sigma S}{h_2^2} = mg,$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{kq\sigma S}{mg}} = \sqrt{\frac{9\times10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}3\times10^{-15}\text{Кл}\times2\times10^{-7}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\times1{,}6\times10^{-4}\text{м}^2}{3\times10^{-12}\text{кг}\times9{,}8\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}}$$
$$= 5{,}421\times10^{-3}\text{м}$$

Колебания начнутся с амплитудой

$$A = h_2 - h_1 = (5{,}421-5)\times10^{-3}\text{м} = 0{,}421\ \times10^{-3}\text{м}$$

3. Ускорение при колебательном движении

$$a = \omega^2\times r_o, T = \frac{2\pi}{\omega} \to T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a}{r_o}}}$$

4. Уменьшение на 10% до амплитуды 50% произойдёт за

$$t = 5\times T = \frac{5\times2\pi}{\sqrt{\frac{a}{r_o}}} = \frac{5\times2\times3{,}14}{\sqrt{\frac{1{,}72\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{0{,}421\ \times10^{-3}\text{м}}}} = 0{,}496\ c$$

Ответ: капля начнет совершать колебания с два раза меньшей амплитудой через $t = 0{,}496\ c$

Критерии оценки:

Записан второй закон Ньютона для начального случая, подставлены соответствующие силы и получено значение *a*	6
Найдено положение равновесия капли	6
Определена амплитуда колебаний	2
Записано соотношения для амплитуды, уменьшенной вдвое и получен ответ	6

Задание 5. (20 баллов) Безопасность в горном деле

По транспортёру, двигающемуся со скоростью 6 см в минуту, на дробилку подаётся горная порода. Примерно 25% её энергии тратится на световую вспышку, которая может быть зафиксирована фоторезистором сквозь смотровую щель. Если в течение 2 с интенсивность света превышает пороговое значение, автоматически на транспортёр начинает добавляться слабая порода для уменьшения искроопасности. Рассчитайте пороговое значение интенсивности света. Когда дробится гранитная порода, ток через фоторезистор протекает при напряжении 10 В, а пороговое значение достигается при напряжении 20,3 В. Приёмный короб дробилки расположен на высоте 4,46 м, его высота 95 см, ширина 2,5 м, расстояние до смотровой щели 5 см, плотность гранита 2 600 кг/м³.

Решение: 1) Масса породы, которая подается транспортером в дробилку, равна $m = \rho V = \rho abL = \rho abvt_1$, где a и b – ширина и высота приёмного короба, ρ – плотность гранита, v - скорость движения транспортера, t_1 – время движения транспортера. Стандартная высота реального короба выше, но и заполняется он не целиком, поэтому была введена гипотетическая высота в 95 см.

Энергия упавшей горной породы $E_{\text{породы}} = mgh = \rho abvt_1gh.$

2) На вспышку идёт $E_{\text{света}} = E_{\text{породы}}\times\text{КПД} = \rho abvt_1gh\text{КПД}.$

3) Через смотровую щель проходит с учетом телесного угла $E_{\text{щели}} = E_{\text{света}}\times\frac{S_{\text{щели}}}{4\pi r^2} = \frac{\rho abvt_1gh\text{КПД}}{4\pi r^2}$, где *r* – расстояние от смотровой щели до фоторезистора.

4) В фоторезистор попадает $E_{\text{ф}} = I\times S_{\text{щели}}\times t_2$, где *I* – интенсивность света, попавшего на фоторезистор:

$E_{\text{щели}} = E_{\text{ф}}$, следовательно, $\frac{\rho abvt_1 gh\text{КПД}}{4\pi r^2} = I \times S_{\text{щели}} \times t_2$, откуда $I = \frac{\rho abvt_1 gh\text{КПД}}{4\pi r^2 S_{\text{щели}} t_2}$, причем $t_1 = t_2$.

5) Интенсивность *I* прямо пропорциональна току через фоторезистор и обратно пропорциональна напряжению на нём. Составим пропорцию:

$\frac{I}{I_{\text{пороговое}}} = \frac{U}{U_{\text{пороговое}}}$, то есть

$I_{\text{пороговое}} = \frac{I \times U}{U_{\text{пороговое}}} = \frac{\rho abvgh\text{КПД}U}{4\pi r^2 S_{\text{щели}} U_{\text{пороговое}}} = \frac{2600\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \times 4{,}46\text{м} \times 0{,}95\text{м} \times 2{,}5\text{м} \times 0{,}001\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \times 0{,}25 \times 20{,}3\text{В}}{4 \times 3{,}14 \times 25 \times 10^{-4}\text{м}^2 \times 10\text{В}} = 4450\ \frac{\text{кг}}{\text{с}^3} = 4450\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Ответ: $I_{\text{пороговое}} = 4450\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Критерии оценки:

Записана полная формула для нахождения подаваемой массы породы	2
Найдена потенциальная энергия породы	2
Записан закон сохранения энергии с учетом КПД (пункт 2)	2
Получена энергия, которая проходит через щель с учетом телесного угла (пункт 3)	2
Получено выражение для энергии, попадающей на фоторезист	3
Найдена интенсивность света (пункт 4)	2
Составлена пропорция интенсивность-напряжение	3
Получен ответ	4