1 вариант

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (15 баллов) У Васи есть куб со стороной длины n, разбитый на n^3 единичных кубиков. Вася закрашивает кубики по очереди. Каждый раз, когда он закрашивает кубик, он записывает в него число, равное количеству уже закрашенных соседей. После закраски всего куба, Вася посчитал сумму всех чисел в кубиках. Какое число у него получилось?

Решение: Назовем грань разноцветной, если она разделяет незакрашенный кубик и закрашенный. Заметим, что мы ставим в кубик число, равное количеству разноцветных граней этого кубика на момент закраски. Заметим, что все грани кубиков, кроме $6N^2$ внешних, учтуться один раз. Тогда очевидно, что сумма всех чисел - это количество таких граней, то есть $\frac{6 \cdot N^3 - 6 \cdot N^2}{2} = 3 \cdot N^2 \cdot (N-1)$.

Критерии

Наличие правильного ответа - 5 баллов.

Наличие факта о том, что каждая “внутренняя” грань добавит в сумму единицу - 10 баллов.

Другие способы доказательства будут оцениваться из 10 баллов.

Разбор частных случаев - 0 баллов.

Задание 2. (15 баллов) Есть N спичек. Вася и Петя играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди. За один ход можно забрать p^n, где p - произвольное простое число, n - целое неотрицательное. Вася ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Заметим, что мы всегда можем забрать $1, 2, 3, 4 = 2^2, 5$ спичек. При этом не существует такого простого, что $p^n = 0$ (mod 6). Рассмотрим два случая

a) N кратно 6. Тогда у второго игрока есть выигрышная стратегия. Своим ходом он должен забрать текущий остаток количества спичек при делении на 6. Заметим, что при такой стратегии, количество спичек будет кратно 6 только после хода второго. Так как 0 делится на 6, то последний ход делал второй игрок. Значит, он победил.

b) Первым ходом отнимаем забираем количество спичек, равное остатку при делении на 6. Мы свели игру к первому случаю, но игроки поменялись местами. Соответственно, выигрышная стратегия существует у первого.

Критерии

Разбор частных случаев – 0 баллов.

Правильный ответ без обоснований – 5 баллов.

Идея с остатками по модулю 6 – 5 баллов.

Описание стратегии – 5 баллов.

Если решение не опирается на идею с модулями, то стратегии оцениваются из 10 баллов.

Задание 3. (20 баллов) Во дворе живёт 219 петухов. Каждый петух имеет свой уникальный номер от 1 до 219. Среди них выстроена иерархия. У i-го петуха есть не более двух подопечных - петух с номером 2i, если такой есть, и петух с номером 2i+1, если такой есть (то есть у петуха номер 1 в подчинении находится петух номер 2 и петух номер 3, у петуха номер 2 подчинённые 4 и 5, у петуха номер 3 -- 6 и 7 и т.д.). Также, подопечными петуха являются подопечные его подопечных и т.д. Крутостью петуха назовём количество его подопечных (очевидно, у петуха под номером один крутость равна 218). Посчитайте суммарную крутость петухов на всём дворе.

Решение: Заметим, что в задаче от нас требуется пересчитать количество пар петухов (начальник, подопечный). Уровнем петуха назовём количество петухов, у которых он является подопечным. Из определения уровней следует, что мы можем считать ответ, как сумму уровней петухов.

Из построения иерархии следует, что в ней есть ровно один петух уровня 0 – это первый петух. Также, поскольку у каждого петуха любого уровня, кроме предпоследнего, есть ровно два непосредственных подопечных, то на уровне $i+1$ должно находиться в два раза больше петухов, чем на уровне i, для всех уровней, кроме двух последних. Таким образом мы получаем, что на всех уровнях, кроме последнего, у нас находится 2^k петухов, где k – это номер уровня. На последнем же уровне находятся все оставшиеся петухи, которые не влезли на уровни выше. Составим табличку, в которой запишем количество петухов на каждом уровне:

Номер уровня	0	1	2	3	4	5	6	7
Количество петухов	1	2	4	8	16	32	64	92

Получили, что ответ равен:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 32 + 6 \cdot 64 + 7 \cdot 92 = 1286$$

Критерии:

В решении присутствует правильный ответ – 5 баллов (оценивается независимо от решения);

В решении присутствует рассуждение про уровни – 5 баллов;

Решение полное, но содержит неточности – 10 баллов;

Полностью обоснованное решение – 15 баллов.

Задание 4. (30 баллов) В одном королевстве живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждому из жителей королевства вы можете задать любой вопрос, на который можно ответить, либо "да", либо "нет".

a. **(10 баллов) Пусть есть один рыцарь и два лжеца, вы можете задавать вопросы каждому из них (не всем сразу). За какое минимальное количество вопросов можно определить, кто из них является рыцарем?**

b. **(20 баллов) Пусть теперь есть сто человек, среди них один рыцарь, остальные лжецы, можно ли за десять вопросов определить, кто из этих ста человек является рыцарем?**

Решение: а) В худшем случае понадобится два вопроса. Можно спросить произвольного человека “ $2+2=5$?”, лжец ответит “да”, рыцарь скажет, что “нет”. За два таких вопроса мы либо найдем лжеца, либо найдем двух рыцарей и тогда лжец определится однозначно.

б) Да, можно.

Для этого давайте как-нибудь упорядочим всех людей, например, выстроим в шеренгу. Теперь заметим, что если мы выберем произвольного человека и спросим у него “рыцарь находится правее тебя?”, то рыцарь на этот вопрос всегда будет отвечать “нет”, а лжец в зависимости от того есть ли правее рыцарь или нет.

Тогда, если мы получили ответ “да”, то мы точно спросили лжеца, и справа от него нет рыцаря, тогда можно больше не рассматривать человека, которого мы спросили и людей находящихся правее его, так как они заведомо не рыцари. Если мы получили ответ “нет”, то возможно два случая: либо мы спросили рыцаря, либо спросили лжеца и это значит, что рыцарь либо правее того человека, либо является человеком, которого мы спросили, а значит можно не рассматривать тех людей, что находятся левее.

Теперь если постоянно спрашивать человека, находящегося в середине рассматриваемого отрезка людей, то на каждом шаге мы будем сокращать область, в два раза. На самом деле в худшем случае, можно считать, что после каждого вопроса область, где находится лжец уменьшается в два раза и округляется вверх. Тогда за 6 вопросов мы сократим рассматриваемую область до длины 2 и дополнительным вопросом выясним, кто из двух оставшихся – лжец.

Критерии:

а) Полный балл ставится за приведение любого примера, нахождения рыцаря за 2 вопроса.

б) Полный балл ставится за любой корректный алгоритм и его обоснование, который решает поставленную задачу за количество вопросов меньшее, либо равное данному. При недостаточной аргументации, но верном ходе решения выставляется балл больший половины от максимального, при наличии серьезных ошибках или больших пропусках в доказательстве ставится от 0 до половины от максимального количества баллов.

Задание 5. (20 баллов) Данил решил сделать сценарий для игры в Dungeons and Dragons для своих друзей. Перед игрой он решил выдать им A монеток для подбрасывания (возможные результаты подбрасывания: 1, 2), B тетраэдров (возможные результаты подбрасывания: 1, 2, 3, 4) и C кубиков (возможные результаты подбрасывания: 1, 2, 3, 4, 5, 6). Для того, чтобы игра была не очень сложной Данил решил ввести ограничение: $A + B + C \leq 10$. В ключевой части сценария друзья Данила должны будут бросить все выданные им кубики, тетраэдры и монетки одновременно и сложить все выпавшие на них числа. Обозначим эту сумму за S. Для того чтобы пройти дальше друзьям необходимо бросить кубики так, чтобы число S было нечётным. Данил решил помочь своим друзьям и выбрать числа A, B и C так, чтобы вероятность того что S будет нечётным была максимальной. Подскажите Данилу оптимальный выбор чисел A, B, C.

Решение: Заметим, что если мы не возьмём ни одного предмета, то сумма выпавших чисел при броске будет всегда равняться нулю – чётному числу. Отсюда следует, что какой бы набор предметов мы не взяли, вероятность выпадения нечётного числа в сумме не будет ниже, чем если мы не возьмём предметов вовсе. Покажем, что независимо от того, какой непустой набор предметов мы возьмём, вероятность, что сумма выпавших в результате броска чисел будет нечётной с вероятностью $\frac{1}{2}$. Докажем это индукцией по размеру набора

База индукции: Какой бы предмет мы не взяли в набор размера один, вероятность получить в результате броска нечётное число на нём равна $\frac{1}{2}$. Это следует из того, что у каждого из предметов чётное число равновероятных исходов, ровно половина из которых даёт нечётное число в сумме.

Шаг индукции: Рассмотрим произвольный набор предметов размера k. Рассмотрим, что будет при добавлении в него любого предмета. По индукции мы имеем, что для набора размера k сумма результатов бросков будет нечётной с вероятностью $\frac{1}{2}$. Также, вероятность того, что на новом добавленном предмете выпадет нечётное число также равна $\frac{1}{2}$. Поскольку эти вероятности независимы, то мы получаем, что вероятность того, что либо в наборе выпала нечётная сумма а на предмете чётная, либо на предмете выпала нечётная сумма, а в наборе нечётная равна $\frac{1}{2}$.

Критерии:

В решении показано, что пустой набор не подойдёт – 5 баллов;

В решении сказано, что любой непустой набор подойдёт и вероятность выпадения нечётного числа $\frac{1}{2}$ – 5 баллов;

Полностью доказанное решение – 20 баллов.

2 вариант

Задание 1. (10 баллов) Ваня решил организовать вечеринку и попросил всех принести на неё красные, синие и зелёные шарики. Поскольку Ваня не уточнял, кому что приносить, некоторые принесли один шарик одного цвета, некоторые два шарика двух разных цветов, а некоторые сразу три шарика всех трёх цветов. На вечеринке выяснилось, что: 34 человека принесли синий шарик (и, возможно, ещё какой-то), 21 человек принесли только два шарика: красный и синий, 8 человек принесли только один красный шарик и 3 человека принесли только два шарика: красный и зелёный. Какое минимальное число людей могло принести хотя бы один или красный, или синий шарик?

Решение: Заметим, что искомое множество людей можно разбить на два подмножества – те, кто принесли синий шарик и те, кто не принесли. Размер первого подмножества явно дан нам в условии – это 34. Другое подмножество – это те, кто точно не принесли синий шарик, но должны были принести красный. Это подмножество разбивается ещё на два подмножества – те, кто принесли зелёный шарик, и те, кто не принесли. Размеры этих множеств также даны нам в условии – это 3 и 8, соответственно. Поскольку рассмотренные нами множества образуют разбиение искомого, то мы можем точно найти его размер: $34 + 3 + 8 = 45$.

Критерии

Полностью обоснованное решение – 10 баллов.

Задание 2. (20 баллов) В стране Берляндия 52206 городов. Из города с номером A есть односторонняя дорога в город с номером B, тогда и только тогда, когда B = A · p, для некоторого простого числа p. Вова живет в городе с номером 1 и очень хочет попасть в город с номером 52206. Вову интересует сколько различных путей существует из города 1 в город 52206, при этом разрешается не более одного раза пройти против направления движения дороги?

Решение: Понятно, что если мы сейчас стоим в городе, номер которого не делится на 52206, то мы будем обязаны сделать шаг назад. Рассмотрим момент, когда мы впервые попали в такой город. Пусть номер этого города n. Тогда в его разложении на простые множители есть число q такое, что n / q делится на 52206. Будем называть это число лишнее простое. Если таких несколько — выберем любое.

Давайте решать задачу методом динамического программирования. Тогда состоянием будут 3 значения: номер города, в котором мы стоим n, ходили ли мы уже назад, есть ли в разложении числа n лишнее простое.

Давайте рассмотрим, какие переходы могут быть.

1. Если есть лишнее простое q, и мы стоим в городе n. Первый переход в состояние n / q, ходили назад, нет лишнего простого. Второй переход в состояние $n \cdot p / q$, не ходили назад, есть лишнее простое. Причём, p должно быть таким, что $n \cdot p / q$ является делителем числа 52206, и $n \cdot p \leq 52206$.
2. Если мы уже ходили назад. Значит, сейчас мы стоим в городе n, который является делителем числа 52206, можем пойти в любой город с номером, $n \cdot p$, который также является делителем 52206, причём p -- простое. значения ходили ли мы назад и есть ли лишнее простое не изменятся.
3. Если мы не ходили назад. Стоим в городе n. Можно сделать переход аналогичный переходу из пункта 2. Можно пойти назад, т.е. перейти в состояние город n / p, где p — простой делитель числа n, ходили назад, нет лишнего простого. Наконец, последний возможный переход: состояние $n \cdot q$, не ходили назад, есть лишнее простое, где q -- такое простое число, что $n \cdot q$ не делится на 52206 и не превосходит его.

Построим граф, где вершинами являются описанные выше состояния, а рёбра -- переходы между состояниями. Тогда ответ это количество путей из состояния 1, не ходили назад, нет лишнего простого в состояние 52206, ходили назад, нет лишнего простого. Плюс количество путей из состояния 1, не ходили назад, нет лишнего простого в состояние 52206, не ходили назад, нет лишнего простого. Понятно, что такой граф является ацикличным. От противного пусть есть вершины (u, w), которые лежат на цикле. Это значит, что из состояния, которое соответствует вершине u можно попасть в состояние, которое соответствует вершине w. Тогда возможны 2 случая:

1. Значения ходили ли мы уже назад у этих состояний равны, тогда $u < w$, значит, единственный способ попасть из w в u — пойти назад, но тогда значения ходили ли мы уже назад будут неравны. Противоречие.
2. Значения ходили ли мы назад у вершин различны. Но это значит, что из состояния, где мы ходили назад можно попасть в состояние, где мы ещё не ходили назад. Противоречие.

Так как граф у нас ациклический, то у него существует топологическая сортировка, то есть такой способ "перенумеровать" вершины графа, что ребра всегда идут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером. Будем считать количество различных путей по порядку: от вершин с меньшим номером в топологической сортировке к вершинам с большим номером.

Понятно, что количество простых чисел, которые нужны для получения ответа в этой задаче очень велико. И посчитать их за время олимпиады не представляется возможным.

Критерии:

Сказано, что не нужно считать все простые — 5 баллов

Использование метода динамического программирования, указание состояния и способов его пересчёта не указан порядок пересчёта — 15 баллов

Полное решение с обоснованием — 20 баллов

Задание 3. (20 баллов) У Вовы есть N растений. Каждое растение имеет N признаков. Известно, что все растения попарно различны, то есть для каждой пары растений найдется такой признак, по которому они различаются. Вова считает, что у растений слишком много признаков. Поэтому он хочет выкинуть один из признаков так, чтобы все растения и без этого признака остались различны. Всегда ли он сможет это сделать?

Решение: Да, всегда. Предположим обратное. Тогда для каждого i от 1 до n существует пара растений, которые различаются только в i-ом признаке. Тогда в графе, вершинами в котором являются растения, а ребрами отличия ровно в одной позиции, существует цикл. Рассмотрим вершины этого цикла $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Без ограничения общности a_1 отличается от a_2 по первому признаку, a_2 от a_3 по второму, $\ldots, a_k$ от a_1 по k-му. Но k-ый признак совпадает у a_1 и a_2, совпадает у a_2 и $a_3, \ldots,$ совпадает у a_{k-1} и a_k. Противоречие.

Критерии:

За разбор частных случаев - 0 баллов.

Присутствует идея с графом различий - 2 балла.

Доказано существование цикла в этом графе - 10 баллов.

За остальные рассуждения - 8 баллов.

Решения, отличные от приведенного, оцениваются из 20 баллов.

Задание 4. (20 баллов) Есть клетчатая доска размера N × N клеток. Изначально, все клетки доски белого цвета. Можно несколько раз выполнить следующее действие: поменять цвет всех клеток любого квадрата размера M × M (M ≤ N), который полностью лежит внутри клетчатой доски, на противоположный (с белого на чёрный, с чёрного на белый). Сколько различных раскрасок доски можно получить?

Решение: Обозначим за $K = N - M + 1$. Всего на доске $N \times N$ существует $K \times K$ различных квадратов $M \times M$.

Рассмотрим последовательность перекрашиваний таких квадратов. Заметим, что нам не важно, в каком порядке применять перекрашивания. Также заметим, что если квадрат дважды перекрашивают, то можно удалить оба вхождения этого квадрата в нашу последовательность.

Теперь докажем, что различным последовательностям соответствуют разные раскраски. Рассмотрим две произвольные последовательности. Упорядочим квадраты по левому верхнему углу и найдем первую позицию в последовательностях, в которой наши последовательности различаются. Очевидно, что при удалении общего префикса ничего не изменится. Обозначим эти два квадрата за A и B. Не ограничивая общности, можно считать, что $A < B$. Рассмотрим клетку, соответствующую верхнему левому углу в A. Заметим, что во второй последовательности она не может быть закрашена, так как наименьший квадрат второй последовательности находится ниже или правее этой клетки.

Таким образом, мы показали, что различным последовательностям соответствуют различные перекрашивания.

При этом различных последовательностей существует $2^{K \times K}$

Критерии:

Доказано, что порядок перекрашиваний не важен - 3 балла.

Доказано, что квадрат либо не встречается в последовательности, либо встречается один раз - 5 баллов.
Доказано, что различным последовательностям соответствуют различные раскраски - 10 баллов.
Правильный ответ - 2 балла.
Разбор частных случаев - 0 баллов.

Задание 5. (30 баллов) На полоске, состоящей из 12 ячеек, с одной стороны написали подряд идущие числа 1, 2, ..., 11, 12. Полоску положили на стол и несколько раз согнули в местах перехода от одной ячейки к другой либо слева направо, либо справа налево. Её продолжали сгибать до тех пор, пока она не превратилась в стопку лежащих друг на друге ячеек. После этого выписали все числа на ячейках сверху вниз и получил перестановку: 2, 12, 5, 4, 3, 8, 9, 10, 7, 6, 11, 1. Существует ли последовательность сгибов, после которой мог получиться такой порядок чисел?

Решение: Приведём конструктивное решение данной задачи.

Шаг 0:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Шаг 1:

				12	11	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Шаг 2:

						8
						9
				12	11	10
1	2	3	4	5	6	7

Шаг 3:

			8
	2	1	9
3	12	11	10
4	5	6	7

Шаг 4:

2		
12		8
5	1	9
4	11	10
3	6	7

Шаг 5:

	1
	11
2	6
12	7
5	10
4	9
3	8

Шаг 6:

2	12	5	4	3	8	9	10	7	6	11	1

Критерии:

Решение содержит неполное доказательство существования такой последовательности или частичное описание конструкции — от 0 до 20 баллов;

Полностью обоснованное решение, либо приведённый пример — 30 баллов.