1 вариант

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (10 баллов) На шахматной доске 2019 $\times$ 2019, поставили 10^6 точек. Можно ли на этой доске расположить квадрат 2×2 так, чтобы он не содержал внутри ни одной точки?

Решение: Заметим, что доску можно разбить на 1009^2 непересекающихся квадратов со стороной 2. Каждая точка покрывает не более одного такого квадрата. Очевидно, что 1000^2 точек не могут покрыть все эти квадраты. Значит, такой квадрат найдется.

Критерии

Только ответ - 0 баллов.

Разбор частных случаев расположения точек на доске - 0 баллов.

Остальные решения оцениваются из 10 баллов.

Задание 2. (15 баллов) Известно, что диагонали выпуклого четырехугольника ABCD разбивают его на 4 треугольника, площади которых - целые числа. Может ли произведение площадей этих треугольников оканчиваться на 2018?

Решение: Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Треугольники ABC и BCD имеют общую сторону. Получаем

$$\frac{S_{ABO}}{S_{BCO}} = \frac{S_{ADO}}{S_{CDO}}$$

Значит $S_{ABO} \cdot S_{CDO} = S_{BCO} \cdot S_{ADO}$. Таким образом получаем, что произведение всех площадей - это квадрат целого числа. Но квадрат целого числа не может оканчиваться на 8. Значит и на 2018 их произведение не оканчивается.

Критерии

Только ответ - 0 баллов.

Доказательство того факта, что произведение площадей является квадратом - 10 баллов.

Доказательство факта о том, что квадрат целого числа не может оканчиваться на цифру 8 - 5 баллов.

Задание 3. (15 баллов) Назовем словом длины n последовательность из n латинских строчных букв. Подсловом данного слова будем считать любой непрерывный подотрезок этого слова (например, ba подслово слова abac). Будем считать два слова различными, если они различаются хотя бы в одной позиции.

a. **(5 баллов) Какое максимальное количество различных подслов может быть в слове длины 20 (при составлении слов можно использовать любые строчные латинские буквы)?**

b. **(10 баллов) Может ли слово длины пять, составленное из строчных букв латинского алфавита, содержать ровно десять различных подслов?**

Решение: а) Заметим, что наибольшее количество подслов достигается в случае, когда все буквы слова различны. Действительно, тогда каждое подслово будет уникальным.

Посчитаем, количество различных подслов у слова длины 20, состоящего из разных букв. Заметим, что любая подстрока однозначно задается своей левой и правой границами и в случае, когда подслово имеет длину большую 1 эти границы различны. Отсюда получаем, что таких подслов всего столько, сколько способов выбрать неупорядоченную пару из двух чисел от 1 до 20, меньшее число будет соответствовать левой границе, большее – правой, и ещё нужно учесть подслова длины один, их будет ровно 20. Отсюда получаем, что ответ равняется $C_{20}^2 + 20 = \frac{20 \cdot 19}{2} + 20$.

б) Нет, не может.

Чтобы это показать, заметим, что слово составленное из 5 одинаковых букв будет иметь ровно 5 подслов. Рассмотрим теперь слово, состоящее из как минимум трёх разных букв, в нём количество различных подслов длины один равняется 3, количество подслов длины 2

как минимум 3 (рассмотрим суффикс и префикс длины два, если они совпадают, то тогда на третьей позиции стоит буква, отличная от любой другой буквы, а значит подстроки длины два, начинающаяся в ней и заканчивающаяся в ней отличаются от всех других; если же суффикс и префикс различны, то мы нашли уже как минимум две различные подстроки длины два, предположим, что все подстроки длины два совпадают, либо с префиксом длины два, либо с суффиксом длины два, тогда рассмотрев все случаи того, какая подстрока с какой совпадает можно прийти к противоречию).

Количество подслов длины три равняется как минимум 3 (заметим, что любые две подстроки длины три пересекаются, либо по одному, либо по двум символам, допустим, что эти подстроки равны, тогда в обоих случаях можно показать, что количество различных символов в строке не будет равняться трём, достаточно рассмотреть какие позиции в строке должны будут совпадать), количество подслов длины четыре строго больше 0 и само слово является своим подсловом, отсюда получаем, что количество подслов строго больше 10. Понятно, что если мы будем рассматривать строки с большим количеством различных букв, количество подслов будет только расти.

Остаётся только один вариант: искомое слово содержит только две различные буквы. Всего всевозможных слов из двух букв длины 5 не очень много (всего 2^5, если не убирать из подсчета симметричные случаи), так что можно их перебрать и убедиться, что среди них нет ни одного слова количество посдслов, которого равнялось бы 10.

Критерии

а) Дан правильный ответ и все рассуждения обоснованы – 5 баллов; все рассуждения корректны и обоснованы, но допущена ошибка в подсчете – 3 балла; дан только ответ или допущена ошибка в рассуждениях – 0 баллов.

б) Дан правильный ответ и приведено корректное обоснование – 10 баллов; замечание о том, что одной буквы недостаточно – 1 балл; обоснование того, что трёх различных букв много – 4 балла; обоснование того, что при количестве различных букв большем, чем три подстрок заведомо больше, чем 10 – 2 балла; за обоснование того, что при двух различных буквах в слове длины 5 не может быть 10 подслов – 3 балла.

Задание 4. (20 баллов) Во дворе живёт 219 петухов. Каждый петух имеет свой уникальный номер от 1 до 219. Среди них выстроена иерархия. У i-го петуха есть не более двух подопечных - петух с номером 2i, если такой есть, и петух с номером 2i+1, если такой есть (то есть у петуха номер 1 в подчинении находится петух номер 2 и петух номер 3, у петуха номер 2 подчинённые 4 и 5, у петуха номер 3 -- 6 и 7 и т.д.). Также, подопечными петуха являются подопечные его подопечных и т.д. Крутостью петуха назовём количество его подопечных (очевидно, у петуха под номером один крутость равна 218). Посчитайте суммарную крутость петухов на всём дворе.

Решение: Заметим, что в задаче от нас требуется пересчитать количество пар петухов (начальник, подопечный). Уровнем петуха назовём количество петухов, у которых он является подопечным. Из определения уровней следует, что мы можем считать ответ, как сумму уровней петухов.

Из построения иерархии следует, что в ней есть ровно один петух уровня 0 – это первый петух. Также, поскольку у каждого петуха любого уровня, кроме предпоследнего, есть ровно два непосредственных подопечных, то на уровне $i+1$ должно находиться в два раза больше петухов, чем на уровне i, для всех уровней, кроме двух последних. Таким образом мы получаем, что на всех уровнях, кроме последнего, у нас находится 2^k петухов, где k – это номер уровня. На последнем же уровне находятся все оставшиеся петухи, которые не влезли на уровни выше. Составим табличку, в которой запишем количество петухов на каждом уровне:

Номер уровня	0	1	2	3	4	5	6	7
Количество петухов	1	2	4	8	16	32	64	92

Получили, что ответ равен:

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 32 + 6 \cdot 64 + 7 \cdot 92 = 1286$

Критерии:

В решении присутствует правильный ответ – 5 баллов (оценивается независимо от решения);
В решении присутствует рассуждение про уровни – 5 баллов;
Решение полное, но содержит неточности – 10 баллов;
Полностью обоснованное решение – 15 баллов.

Задание 5. (40 баллов) В одном королевстве живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждому из жителей королевства вы можете задать любой вопрос, на который можно ответить, либо "да", либо "нет".

a. **(10 баллов) Пусть есть один рыцарь и два лжеца, вы можете задавать вопросы каждому из них (не всем сразу). За какое минимальное количество вопросов можно определить, кто из них является рыцарем?**

b. **(30 баллов) Пусть теперь есть сто человек, среди них один рыцарь, остальные лжецы, можно ли за десять вопросов определить, кто из этих ста человек является рыцарем?**

Решение: а) В худшем случае понадобится два вопроса. Можно спросить произвольного человека “ $2+2=5$?”, лжец ответит “да”, рыцарь скажет, что “нет”. За два таких вопроса мы либо найдем лжеца, либо найдем двух рыцарей и тогда лжец определится однозначно.

б) Да, можно.

Для этого давайте как-нибудь упорядочим всех людей, например, выстроим в шеренгу. Теперь заметим, что если мы выберем произвольного человека и спросим у него “рыцарь находится правее тебя?”, то рыцарь на этот вопрос всегда будет отвечать “нет”, а лжец в зависимости от того есть ли правее рыцарь или нет.

Тогда, если мы получили ответ “да”, то мы точно спросили лжеца, и справа от него нет рыцаря, тогда можно больше не рассматривать человека, которого мы спросили и людей находящихся правее его, так как они заведомо не рыцари. Если мы получили ответ “нет”, то возможно два случая: либо мы спросили рыцаря, либо спросили лжеца и это значит, что рыцарь либо правее того человека, либо является человеком, которого мы спросили, а значит можно не рассматривать тех людей, что находятся левее.

Теперь если постоянно спрашивать человека, находящегося в середине рассматриваемого отрезка людей, то на каждом шаге мы будем сокращать область, в два раза. На самом деле в худшем случае, можно считать, что после каждого вопроса область, где находится лжец уменьшается в два раза и округляется вверх. Тогда за
6 вопросов мы сократим рассматриваемую область до длины 2 и дополнительным вопросом выясним, кто из двух оставшихся – лжец.

Критерии:

а) Полный балл ставится за приведение любого примера, нахождения рыцаря за 2 вопроса.

б) Полный балл ставится за любой корректный алгоритм и его обоснование, который решает поставленную задачу за количество вопросов меньшее, либо равное данному. При недостаточной аргументации, но верном ходе решения выставляется балл больший половины от максимального, при наличии серьезных ошибках или больших пропусках в доказательстве ставится от 0 до половины от максимального количества баллов.

2 вариант

Задание 1. (15 баллов) Вова, Саша и Данил делят деньги. Всего у них есть 100 рублей. Так как Вова отсутствует при разделении денег, то Саша и Данил решили, что ему достанется не больше 20 рублей. Ребята хотят максимизировать суммарное удовольствие от разделения денег. Известно, что удовольствие одного человека равно количеству денег, которые он получил, умноженному на

какой-то коэффициент. Для Вовы, Саши и Данила эти коэффициенты равны 2, 1 и 3 соответственно. Как ребятам нужно поделить деньги, чтобы суммарное удовольствие было максимально.

Решение: Пусть x, y, z - деньги, которые получит Вова, Саша и Данил соответственно. Тогда мы имеем следующие ограничения:

$\{x + y + z = 100,\ x \le 20,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

И хотим максимизировать $2x + y + 3z$. Заметим, что мы можем отдать все 100 рублей Данилу. При этом любое другое распределение уменьшит суммарное довольство. Действительно, если мы хотим забрать у Данила a рублей и раздать их Саше и Вове, то мы сначала уменьшаем функцию на $3a$, а затем повышаем не более чем на $2a$.

Критерии

Только ответ - 0 баллов.

Всё доказательство - 15 баллов.

Задание 2. (15 баллов) 6 солдат стоят в строю. Приходит командир, видит, что третий по росту солдат стоит в строю раньше, чем четвёртый и приказывает солдатам перестроиться. После этого солдаты как-то меняют свой порядок, и командир проверяет строй. Если он снова видит, что третий по росту солдат стоит раньше, чем четвёртый, то повторяет свой приказ. Так происходит, пока после очередного перестроения четвёртый по росту солдат не будет стоять раньше третьего. Поскольку солдаты не глупые, то они каждый раз встают в таком порядке, в котором ещё не стояли до этого. Могло ли так получиться, что командир отдал 372 приказа о перестроении прежде, чем четвёртый по росту солдат встал в строю раньше третьего?

Решение: Заметим, что всего количество различных перестановок, в которых солдаты могли стоять в строю равно $6!$. При этом, в силу симметрии, количество таких перестановок, в которых третий солдат стоит раньше четвёртого, равно количеству перестановок, в которых четвёртый солдат стоит раньше третьего. Поскольку в сумме эти перестановки дают всё множество перестановок, то количество перестановок каждого из вышеописанных видов равно $6!/2 = 720/2 = 360$.

Остаётся только заметить, что чтобы командир отдал 372 приказа, нужно, чтобы существовало 372 перестановки, в которых третий солдат стоит раньше четвёртого, что мы только что опровергли. Таким образом мы получаем, что командир не мог отдать 372 приказа.

Критерии

Решение полное, но содержит неточности – 10 баллов;

Полностью обоснованное решение – 15 баллов.

Задание 3. (20 баллов) Есть набор чисел от 1 до 7, назовем тройку чисел интересной, если ее произведение НЕ является полным квадратом. При этом тройки, которые отличаются только порядком чисел в ней будем считать одинаковыми. Сколько существует интересных троек среди данного набора чисел?

Решение: Всего существует $C_7^3 = 35$ неупорядоченных троек чисел из искомого набора, некоторые из них являются интересными.

Посчитаем количество НЕинтересных троек, то есть таких, что произведение чисел в них является полным квадратом. Тогда ответ на искомую задачу будет равен разности общего количества троек и количества неинтересных троек.

Покажем, что единственная неинтересная тройка $(2, 3, 6)$. Во-первых, она действительно неинтересная, так как $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6 \cdot 6$. Осталось показать единственность.

Заметим, что число является полным квадратом тогда и только тогда, когда степени с которыми простые множители входят в разложения числа являются четными числами.

Отсюда сразу же вытекает, что 7 и 5 не могут содержаться в неинтересной тройке, так как они единственные содержат в себе в качестве простых множителей числа 7^1 и 5^1.

Предположим, что наибольшее число неинтересной тройки – $6 = 2^1 \cdot 3^1$, нам нужно чтобы степени при двойке и тройке стали четными и при этом не добавилось других множителей с нечетной степенью. Этого можно достичь только взяв в тройку числа 2 и 3; 1 нельзя брать так как 6 уже используется в тройке, а следующее число вида $2^{2k-1} \cdot 3^{2m-1}$ заведомо больше 7; 4 не подходит так как не меняет четность степеней 2 и 3, получили случай аналогичный случаю с 1. Больше случаев нет, значит для случая, когда 6 – максимальный элемент тройки, существует всего одна неинтересная тройка.

Пусть теперь 4 – максимальный элемент тройки, тогда нужно, либо найти два полных квадрата меньше 4, можно перебрать все варианты и показать, что их нет, либо найти два числа меньших 4, таких что их произведение – полный квадрат, таких чисел так же нет. Отсюда получаем, что в случае, когда 4 входит в тройку в качестве наибольшего элемента, не существует неинресных троек.

Остался последний случай, когда максимальный элемент тройки – 3, в этом случае сущесвукет всего одна тройка $(1,2,3)$ и она не является полным квадратом, а значит является интересной.

Таким образом, получается что существует всего одна неинтересная тройка чисел, значит существует 34 интересные тройки чисел.

Критерии

Дан правильный, обоснованный ответ – 20 баллов; В случае неправильного ответа в виду незначительных арифметических ошибок, но верной логики рассуждений, можно получить до 15 баллов; Решения, содержащие неполное обоснование правильности ответа и/или грубые и частые арифметические ошибки получают от 0 до 10 баллов.

Задание 4. (20 баллов) В стране Берляндия 52206 городов. Из города с номером A есть односторонняя дорога в город с номером B, тогда и только тогда, когда B = A · p, для некоторого простого числа p. Вова живет в городе с номером 1 и очень хочет попасть в город с номером 52206. Вову интересует сколько различных путей существует из города 1 в город 52206?

Решение: Рассмотрим произвольное число x, в него ведут дороги из всех делителей числа x. Значит, Вова может побывать только в городах с номером, которые являются делителем 52206, иначе он просто не сможет добраться до желаемого города.

Построим граф, где вершинами будут города с номерами, которые являются делителями 52206, а наличие ориентированного ребра между вершинами определяется также, как в условии. Построить такой граф можно перечислив все делители числа, а для этого достаточно посмотреть на его представление в виде простых множителей.

Заметим теперь, что в полученном графе не может быть цикла. От противного, допустим, что у нас есть цикл из трех вершин с номерами a, b и c, давайте заметим, что по определению наличия ребра вытекает, что если из вершины u есть ребро в вершину v, то $u < v$, отсюда получается, что выполняется $a < b < c < a$, что, очевидно, невозможно, получили противоречие.

Так как граф у нас ациклический, то у него существует топологическая сортировка, то есть такой способ “перенумеровать” вершины графа, что ребра всегда идут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

Для каждой вершины с номером x будем считать величину $f(x) = \sum\limits_{d} f(\frac{x}{d})$, где d пробегает по всем простым делителям числа x, при этом будем считать, что $f(1) = 1$.

Значения $f(x)$ будем вычислять в порядке топологической сортировки, так как в этом случае на момент вычисления $f(x)$ все значения, необходимые для вычисления этой величины уже будут посчитаны.

В конце концов мы дойдем до 52206 и посчитаем ответ для него.

Выше приведен алгоритм вычисления ответа в общем случае и доказательство его корректности, проделав данный алгоритм можно было получить, что ответ на задачу равняется 120.

Критерии:

Приведена графовая интерпретация задачи – 5 баллов; Доказана ацикличность полученного графа – 5 баллов; Введена функция $f(x)$ или аналогичная и обоснована корректность её применения – 2 балла; Приведен и обоснован способ вычисления введенной функции – 3 балла; Правильный ответ, при наличие всех обоснований – 5 баллов; Решения, содержащие арифметические ошибки не получают баллы за последний пункт, но могут получать баллы за предыдущие критерии.

Задание 5. (30 баллов) Есть клетчатая доска размера N × N клеток. Изначально, все клетки доски белого цвета. Можно несколько раз выполнить следующее действие: поменять цвет всех клеток любого квадрата размера M x M (M ≤ N), который полностью лежит внутри клетчатой доски, на противоположный (с белого на чёрный, с чёрного на белый). Сколько различных раскрасок доски можно получить?

Решение: Обозначим за $K = N - M + 1$. Всего на доске $N \times N$ существует $K \times K$ различных квадратов $M \times M$.

Рассмотрим последовательность перекрашиваний таких квадратов. Заметим, что нам не важно, в каком порядке применять перекрашивания. Также заметим, что если квадрат дважды перекрашивают, то можно удалить оба вхождения этого квадрата в нашу последовательность.

Теперь докажем, что различным последовательностям соответствуют разные раскраски. Рассмотрим две произвольные последовательности. Упорядочим квадраты по левому верхнему углу и найдем первую позицию в последовательностях, в которой наши последовательности различаются. Очевидно, что при удалении общего префикса ничего не изменится. Обозначим эти два квадрата за A и B. Не ограничивая общности, можно считать, что $A < B$. Рассмотрим клетку, соответствующую верхнему левому углу в A. Заметим, что во второй последовательности она не может быть закрашена, так как наименьший квадрат второй последовательности находится ниже или правее этой клетки.

Таким образом, мы показали, что различным последовательностям соответствуют различные перекрашивания.

При этом различных последовательностей существует $2^{K \times K}$

Критерии:

Доказано, что порядок перекрашиваний не важен - 3 балла.

Доказано, что квадрат либо не встречается в последовательности, либо встречается один раз - 5 баллов.

Доказано, что различным последовательностям соответствуют различные раскраски - 10 баллов.

Правильный ответ - 2 балла.

Разбор частных случаев - 0 баллов.