1варинт

Время выполнения задания – 240 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Пусть $\alpha, \beta, \gamma -$ углы остроугольного треугольника. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$.

Решение: **Первое решение:** По формуле приведения имеем $\cos^2\gamma = \cos^2(180 - \alpha - \beta) = \cos^2(\alpha + \beta)$. Так как $\gamma < 90°$, то $\alpha + \beta > 90°$ и $\cos(\alpha + \beta) < 0$.
По формуле косинус суммы имеем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + (1 - \cos^2\alpha) \cdot (1 - \cos^2\beta) - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = 2\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + 1 = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) + 1 = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta) + 1 < 1$, что и требовалось доказать.
Второе решение: Пусть $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$. Пусть $A_1, B_1, C_1 -$ основания высот, проведённых из вершин треугольника A, B, C соответственно. Заметим, что $\frac{S_{AB_1C_1} + S_{BA_1C_1} + S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}} < 1$. С другой стороны, $\frac{S_{AB_1C_1} + S_{BA_1C_1} + S_{CA_1B_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha}{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha} + \frac{BA_1 \cdot BC_1 \cdot \sin\beta}{BA \cdot BC \cdot \sin\beta} + \frac{CA_1 \cdot CB_1 \cdot \sin\gamma}{CA \cdot CB \cdot \sin\gamma} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$.

Задание 2. (20 баллов) Какое наибольшее количество ладей можно поставить на шахматную доску (размером 8×8 клеток) так, чтобы каждая ладья била не более трёх других?

Решение: Возьмём некоторую расстановку ладей, удовлетворяющую условию задачи. Пусть в этой расстановке есть хотя бы одна ладья, не стоящая на краю доски. Рассмотрим крайние клетки доски, стоящие с выбранной в одной строке и одном столбце – всего их 4. Из условия задачи следует, что хотя бы одна из этих клеток свободна, поэтому выбранную ладью мы можем переместить на эту клетку, и расстановка по-прежнему будет удовлетворять условию задачи. Повторим процесс для всех клеток, не стоящих с краю. Из этого можно сделать вывод, что существует корректная расстановка, в которой ладей не меньше, чем в исходной, но все они стоят на краю доски. Поэтому ладей в любой корректной расстановке не может быть больше количества крайних клеток, то есть 28.
Пример на 28 клеток: ставим всех ладей на крайние клетки доски.

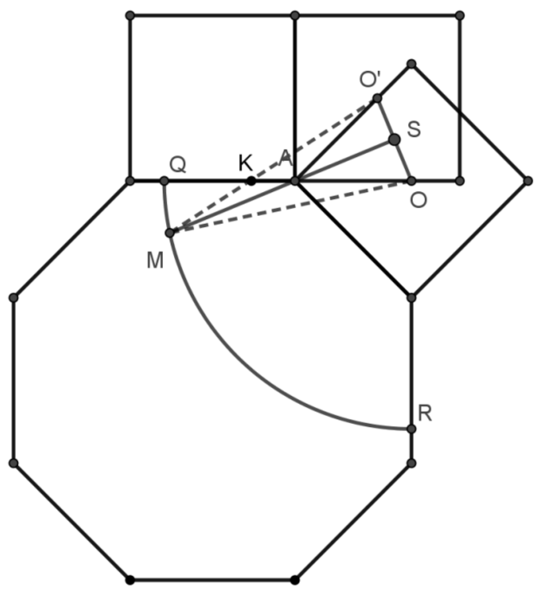
Задание 3. (20 баллов) Может ли десятичная запись числа вида $a^3 + a^2 + a$ при некотором натуральном a состоять только из девяток?

Решение: Предположим, что при некотором натуральном a такое могло случиться. Тогда $a^3 + a^2 + a + 1 = (1 + a)(1 + a^2) = 10^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что оба множителя не могут одновременно делиться на 5, так как $1 + a$ делится на 5 при $a \equiv 4 \ (mod\ 5)$, а $1 + a^2$ делится на 5 при $a \equiv \{2; 3\} \ (mod\ 5)$. Значит один из множителей $1 + a$ и $1 + a^2$ содержит все множители 5, то есть делится на 5^n. Этим множителем не может быть $1 + a$, так как в этом случае $2^n \geq 1 + a^2 \geq 1 + a \geq 5^n$, что неверно. Также заметим, что числа $1 + a$ и $1 + a^2$ одинаковой чётности и их произведение чётно. Значит они оба чётные, причём $1 + a^2$ не делится на 4, откуда $1 + a^2 = 2 \times 5^n$. В таком случае $1 + a = 2^{n-1}$. Остаётся заметить, что $2 \times 5^n = 1 + a^2 < (1 + a)^2 = 4^{n-1} < 2 \times 5^n$, что указывает на невозможность этого случая.

Задание 4. (20 баллов) Имеется правильная восьмиугольная призма, все рёбра которой равны 2 м. В центре одной из боковых граней сидит паучок. Он может двигаться по поверхности призмы, пока не закончится его паутинка длины 3 м. Паучку стало интересно, существуют ли на основаниях призмы точки, до которых он может добраться не менее чем двумя

различными кратчайшими путями, и при этом истратив всю паутинку. Помогите паучку посчитать количество таких точек.

Решение: Обозначим за O точку, в которой изначально сидит паучок. Будем искать точки с указанным свойством на нижней грани призмы. В силу симметрии конструкции такое же количество найденных точек будет и на верхней грани призмы. Пусть $M -$ некоторая точка нижнего основания призмы с указанным свойством. Для попадания паучка на нижнюю грань, он должен пересечь нижнее ребро некоторой боковой грани. Рассмотрим варианты, при которых он мог это сделать. Рассмотрим развёртку боковой поверхности призмы. Она представляет собой прямоугольник размером 2×16 м, состоящий из квадратов размера 2×2 м. Пусть $K -$ точка на нижнем основании этого прямоугольника, в которую попал паучок перед тем, как начать ползти по нижнему основанию призмы. По неравенству треугольника паучок должен двигаться к ней по отрезку OK, так как иначе пройденное им расстояние увеличится. Расстояние от точки O до дальнего угла соседнего квадрата равно $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}>3$, откуда следует, что точка K лежит либо на грани, с которой стартовал паучок, либо на грани, соседней со стартовой. Предположим, что два кратчайших расстояния реализовались, при этом в одном пути паучок пересёк ребро начальной грани, а в другом – ребро соседней грани. Рассмотрим две развёртки: на одной изобразим начальную грань, стартовую точку O и примыкающую к ней нижнюю грань; на другой изобразим начальную грань с той же стартовой точкой, но обозначенной O', и соседнюю грань с примыкающей к ней нижней гранью. Наложим эти развёртки. Проведём окружность с центром в точке O и радиусом 3 м. $PQ -$ дуга этой окружности, заключенная внутри основания призмы. Пусть точка $S -$ середина OO'. Проведём серединный перпендикуляр к стороне OO'. Пусть он пересечёт дугу PQ в точке M. Поскольку $AO = AO'$, SM пройдёт через точку A. Точка M равноудалена от O и O', и $MO' = MO = 3$ м $-$ по построению, следовательно, $M -$ искомая. Других путей, реализуемых по выбранной соседней грани, нет, так как точка с указанным свойством должна лежать на дуге PQ и на прямой SA, а их пересечение единственно. В силу симметрии, такая же точка есть и на другой половине дуги, а кратчайшее расстояние до неё реализуется по другой соседней грани.



Теперь рассмотрим случай, когда два кратчайших расстояния реализовались, при этом в обоих путях паучок пересёк ребро соседней грани. Если при таком случае найдётся точка M с указанным свойством, то расстояние от неё до точки O будет больше трёх, иначе $O'M$ не будет кратчайшим путём. Все точки, расстояние от которых до точки O больше, чем до точки O', лежат выше прямой SM. Аналогичная прямая появится при рассмотрении развёртки с другой соседней гранью, а искомая точка должна находиться ниже этой прямой. Эти прямые составляют с нижним ребром стартовой грани угол 67,5°. Это означает, что прямые пересекутся вне грани основания призмы, и поэтому пересечение областей, в которых лежат точки с указанным свойством, пустое. В данном случае новых точек не появляется.

По сказанному ранее, на верхней грани призмы существуют такие же две точки с указанным свойством, значит всего точек четыре.

Задание 5. (20 баллов) Для положительных чисел a, b, c таких, что $ab + bc + ac = 1$, докажите, что $\sqrt{\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ac(a+c)} + \frac{c^2}{ab(a+b)}} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)$.

Решение: Заметим, что $\sqrt{\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ac(a+c)} + \frac{c^2}{ab(a+b)}} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ac(a+c)} + \frac{c^2}{ab(a+b)}\right) \times (ab + bc + ac)} \geq$ [неравенство КБШ] $\geq \sqrt{\frac{a^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+c}} + \sqrt{\frac{c^2}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}$. Докажем теперь, что $\frac{2a}{\sqrt{b+c}} + \frac{2b}{\sqrt{a+c}} + \frac{2c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$. В силу симметричности левой и правой частей неравенства, можно без ограничения общности считать, что $a \geq b \geq c$, тогда $\frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+c}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b}}$. Применяя транснеравенство для наборов $\{a, a, b, b, c, c\}$ и $\left\{\frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{a+c}}, \frac{1}{\sqrt{a+c}}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right\}$, получаем $\frac{2a}{\sqrt{b+c}} + \frac{2b}{\sqrt{a+c}} + \frac{2c}{\sqrt{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{b+c}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+c}} + \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$, что и требовалось доказать.

2 вариант

Задание 1. (20 баллов) Три положительных числа являются членами возрастающей арифметической прогрессии, а их попарные отношения (большего числа к меньшему), взятые в некотором порядке – членами возрастающей геометрической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Решение: Пусть $a, b, c -$ искомые числа и $a < b < c$. Тогда по свойству арифметической прогрессии $a + c = 2b$. Их попарные отношения имеют вид $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$. Дробь $\frac{c}{a} -$ наибольшая, как отношение наибольшего числа к наименьшему. Значит возможны два варианта:

1) $\frac{b}{a} < \frac{c}{b} < \frac{c}{a}$, тогда по свойству геометрической прогрессии $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$, то есть $c = \left(\frac{b}{a}\right)^2$. Заметим, что знаменатель прогрессии равен $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{c}$, значит прогрессия имеет вид $\sqrt{c}, c, c\sqrt{c}$, откуда $b = 1, c = \frac{1}{a^2}$. Подставив в свойство арифметической прогрессии, получаем $a + \frac{1}{a^2} = 2$ или $a^3 - 2a^2 + 1 = 0$. Заметим, что $a^3 - 2a^2 + 1 = (a-1)(a^2 - a - 1)$, откуда $a = 1, a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Значения 1 и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ не подходят, так как $a < b$, а $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ не подходит в силу положительности чисел. Значит этот случай невозможен.

2) $\frac{c}{b} < \frac{b}{a} < \frac{c}{a}$, тогда по свойству геометрической прогрессии $\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то есть $\frac{1}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$. Заметим, что знаменатель прогрессии равен $\frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, значит прогрессия имеет вид $\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a\sqrt{a}}$, откуда $b = 1, c = \frac{1}{\sqrt{a}}$ то есть $a = \frac{1}{c^2}$. Подставив в свойство арифметической прогрессии, получаем $c + \frac{1}{c^2} = 2$.

Из первого случая мы знаем, что $c = 1, c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Значения 1 и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ не подходят, так как $c > b$. Значит $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и знаменатель прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задание 2. (20 баллов) На волшебном дереве растут натуральные числа. Изначально на нем есть числа 5, 10, 17, 26. Новое число *n* может вырасти на дереве, если на нем уже есть такие *a* и *b*, что *n* = *ab*-*a*-*b*+2. Может ли на дереве когда-нибудь вырасти число 2019^{2018}?

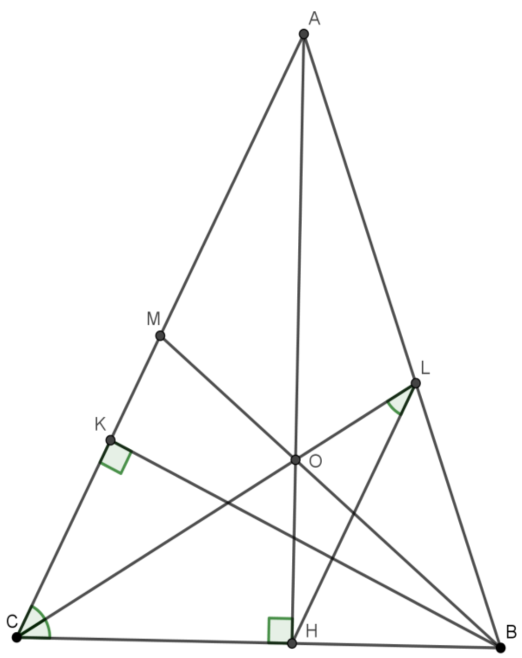
Решение: Заметим, что все изначально растущие на волшебном дереве числа имеют вид m^2+1, где $m \in \mathbb{N}$. Новое число, которое может вырасти на дереве, имеет вид $n = ab - a - b + 2 = (a-1)(b-1)+1$. Если $a = x^2+1$ и $b = y^2+1$ при некоторых $x, y \in \mathbb{N}$, то $n = x^2y^2+1$, то есть имеет тот же вид, что и исходные числа. Это означает, что на дереве могут вырасти только увеличенные на единицу квадраты натуральных чисел. Число 2019^{2018} таковым не является, так как иначе предыдущее число тоже является квадратом, что неверно.

Задание 3. (20 баллов) Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac = 3$. Докажите, что $\frac{a+1}{bc} + \frac{b+1}{ac} + \frac{c+1}{ab} \geq 6$.

Решение: Исходное неравенство равносильно неравенству
$\frac{a+1}{bc} + \frac{b+1}{ac} + \frac{c+1}{ab} + ab + bc + ac \geq 9$.
Известно, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше 2, значит $ab + \frac{1}{ab} + bc + \frac{1}{bc} + ac + \frac{1}{ac} \geq 6$, следовательно, $\frac{a+1}{bc} + \frac{b+1}{ac} + \frac{c+1}{ab} + ab + bc + ac \geq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} + 6$, поэтому достаточно доказать, что
$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 3$.
По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем $3 = ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ac}$, откуда $abc \leq 1$. Вновь применяя это же неравенство, получаем $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{bc} \times \frac{b}{ac} \times \frac{c}{ab}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 3$, что и требовалось доказать.

Задание 4. (20 баллов) В треугольнике ABC проведены пересекающиеся в одной точке высота AH, медиана BM и биссектриса CL. Точка $K -$ основание высоты, проведённой из вершины B. Докажите, что $KH = BL$.

Решение: Так как AH, BM и CL пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы имеем $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BH}{HC} = 1$. Так как $CM = MA$ по условию, то $\frac{AL}{LB} = \frac{HC}{BH}$, откуда по теореме Фалеса следует параллельность прямых AC и LH. Тогда $\angle ACL = \angle CLH$, как накрест лежащие, а также $\angle LCH = \angle CLH$, из чего следует, что $LH = HC$. Из этого также следует, что $\angle LHB = \angle LCH + \angle CLH = \angle ACB$. По свойству биссектрисы $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB}$. Так как $BC \perp AH$, то $HC = AC \cdot cos\angle ACB$. Из последних двух равенств имеем $\frac{AC}{CB} = \frac{AL}{LB} = \frac{HC}{BH} = \frac{AC \cdot cos\angle ACB}{BH}$, то есть $BH = CB \cdot cos\angle ACB = CK$.
В итоге $\angle LHB = \angle ACB, LH = HC, BH = CK$, поэтому равны треугольники BLH и CKH, а значит $KH = BL$, что и требовалось доказать.



Задание 5. (20 баллов) Петя покрасил клетки квадратной доски размером 8×8 клеток в два цвета. Вася выбирает цвет, 2 строки и 2 столбца и считает суммарное количество клеток выбранного им цвета в этих строках и столбцах. Какое наибольшее суммарное количество клеток Вася гарантированно может получить, какую бы раскраску не выбрал Петя?

Решение: Без ограничения общности пусть клеток чёрного цвета не меньше 32, тогда можно оставить только 32 из них и максимум, естественно, не увеличится. Соответственно, будем решать задачу для ровно 32 чёрных клеток.

Пусть мы можем выбрать две строчки, в которых суммарно n чёрных клеток. Тогда в остальных 6 строках $32 - n$ чёрных клеток, которые находятся в 8 столбцах из 6 клеток. По принципу Дирихле среди них можно выбрать два столбца, в которых не меньше $(32 - n)/4$ чёрных клеток. Получится не меньше $n + (32 - n)/4 = 8 + 3n/4$, что строго больше 15, если n хотя бы 10. Следовательно, если можно выбрать две строки/столбца, в которых суммарно не менее 10 чёрных клеток, то можно выбрать крест с не менее, чем 16 чёрными клетками.

Теперь предположим, что в любых двух строчках и любых двух столбцах не более 9 чёрных клеток. Тогда:

1) Не может быть строки или столбца с 6 и более клетками чёрного цвета, так как тогда по принципу Дирихле найдётся строка с 4 и более клетками чёрного цвета.
2) Не может быть двух строк или двух столбцов с 5 чёрными клетками. Следовательно, набор количества чёрных клеток в строках/столбцах может быть либо 54444443, либо 44444444 чёрных клеток, то есть существует не менее 6 строк, в которых ровно 4 чёрных и 4 белых.

Пусть во всех столбцах по 4 чёрных клетки. Рассмотрим три любые строки из 6, в которых по 4 белых клетки. Найдутся две строки, в двух столбцах которых только белые клетки (так как в противном случае белые клетки есть минимум в 4+3+2 = 9 столбцах). Так как в этих столбцах по 4 черных клетки, то суммарно в выбранных строчках и этих столбцах найдутся 16 черных клеток. Аналогично поступим, если во всех строках по 4 черные клетки.

Если же и в строках, и в столбцах количества чёрных клеток равны 54444443, то выберем строчку и столбец, в которых по 5 чёрных клеток, т.е. суммарно не менее 9. Среди 7 остальных столбцов есть не менее двух, которые пересекаются с выбранной строкой по белой клетке, и среди этих двух есть не менее одного столбца, в котором ровно 4 чёрных клетки. Точно так же среди остальных 7 строк найдется хотя бы одна такая, в которой ровно 4 чёрных клетки, а с первым выбранным столбцом она пересекается по белой. Выбранная строка может пересечься по чёрной клетке со вторым выбранным столбцом, поэтому она добавит не более чем 3 чёрные клетки. Добавим эти строку и столбец к выбранным. Итого в них не менее 9+4+3 = 16 черных клеток. В итоге мы доказали, что Вася может гарантированно выбрать 16 клеток одного цвета.

Примером того, что выбрать больше 16 клеток у Васи не всегда получится, является шахматная раскраска. В каждой строке и в каждом столбце ровно по 4 белых и 4 чёрных клетки, значит в любых 2 столбцах и 2 строках суммарно будет выбрано не более, чем $4 \cdot 4 = 16$ одноцветных клеток.