1 вариант

Время выполнения задания – 240 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Внутри треугольника ABC отметили точку M. Известно, что $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$. Могли ли площади треугольников AMB, BMC, CMA оказаться равными a^2, b^2, c^2?

Решение: Пусть углы между проведёнными отрезками равны в каком-то порядке α, β, γ. Предположим, что площади могли иметь такие величины. Тогда $\frac{1}{2}(ab\sin\alpha + ac\sin\beta + bc\sin\gamma) = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMA} = S_{ABC} == a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac > ab\frac{\sin\alpha}{2} + ac\frac{\sin\beta}{2} + bc\frac{\sin\gamma}{2}$ – противоречие.

Задание 2. (20 баллов) Найти все пары целых чисел a и b таких, что числа $\sqrt{\sqrt{a}+b}$ и $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ являются целыми.

Решение: Очевидно, что числа a и b должны иметь следующий вид $a = n^2, b = m^2$. Тогда числа $m^2 + n$ и $n^2 + m$ должны являться полными квадратами. Если одно из чисел m, n равно нулю, то второе также должно являться полным квадратом. Если оба числа больше нуля, то $m^2 + n \geq (m+1)^2, n^2 + m \geq (n+1)^2$. Раскрыв скобки и сложив, получаем $0 \geq m + n + 2$, чего не может быть.

Ответ: $(0; k^4), (k^4; 0), (0; 0)$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Задание 3. (20 баллов) Решите уравнение $(4x-3)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+3}{4}\right)^2$.

Решение: *Лемма.* Если $f(x)$ – монотонно возрастающая функция, то уравнения $f(x) = x$ (А) и $f(f(x)) = x$ (Б) эквивалентны, то есть множества корней уравнений совпадают.

Доказательство. Уравнение (Б) является следствием уравнения (А), так как любой корень (А) удовлетворяет (Б). (Если $f(x_0) = x_0$, то $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$).

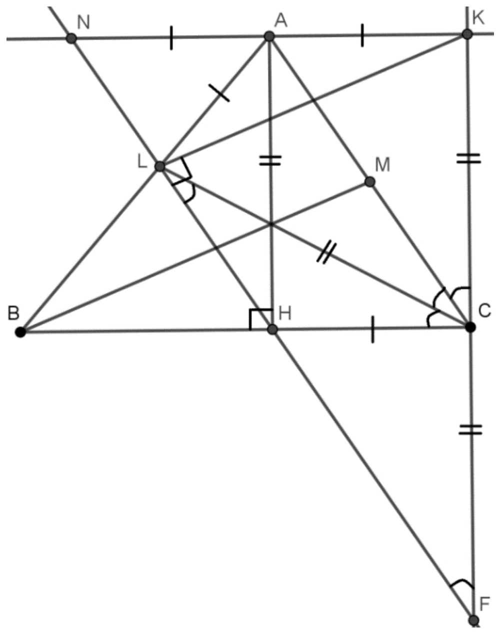
Докажем, что любой корень уравнения (Б) удовлетворяет уравнению (А). Пусть x_0 такое, что $f(f(x_0)) = x_0$. Предположим, что $f(x_0) \neq x_0$ и для определённости $f(x_0) > x_0$. Тогда в силу возрастания функции $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Рассмотрим исходное уравнение. Поскольку правая часть неотрицательна, то решения существуют лишь при $x \geq \frac{3}{4}$. На этом множестве функция $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}+3}{4}$ строго возрастает. Заметим, что уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, которое по доказанной лемме эквивалентно уравнению $f(x) = x$. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+3}{4} = x$ или $x^2 = (4x-3)^3$, откуда $64x^3 - 145x^2 + 108x - 27 = 0$. Одним из корней уравнения является $x = 1$, поэтому $64x^3 - 145x^2 + 108x - 27 = (x-1)(64x^2 - 81x + 27) = 0$. Других корней нет, так как получившееся квадратное уравнение не имеет решений.

Задание 4. (20 баллов) В треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые из разных вершин, пересекаются в одной точке, причём длины у высоты и биссектрисы равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

Решение: **Решение:** Пусть высота AH, медиана BM и биссектриса CL пересекаются в точке O. По условию задачи $BM = CL$. Проведём через вершины A и C прямые, параллельные стороне BC и высоте CH соответственно; их пересечение обозначим точкой K. Продлим LH до пересечения с прямыми AK и CK. Пусть $LH \cap AK = N, LH \cap CK = F$. Четырёхугольник $AKCH -$ прямоугольник по построению, $M -$ середина AC, следовательно, точки H, M, K лежат на одной прямой. Кроме того, $AK = CH$.

Поскольку AH, BM и CL пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы следует $\frac{BL}{LA} \times \frac{AM}{MC} \times \frac{CH}{HB} = 1$, откуда $\frac{BL}{LA} = \frac{BH}{HC}$. Применяя обратную теорему Фалеса, получаем параллельность прямых AC и HL, из чего следует, что $NACH -$ параллелограмм, а значит $NA = CH$. Отсюда и из доказанного выше $AK = NA$; это означает, что $HA -$ средняя линия треугольника NFK и $HA = CF$. В треугольнике KLF медиана LC равна половине стороны KF, значит $\angle KLF = 90°$ и $\angle CLH = \angle LFC$.



Пусть $\angle LCB = \alpha$, тогда $\angle ACL = \alpha$ по условию. $\angle CLH = \angle ACL = \alpha$, как накрест лежащие, а $\angle KCL = \angle CLH + \angle LFC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника LFC, откуда $\angle BCK = 3\alpha$. С другой стороны, $\angle BCK = 90°$, как угол прямоугольника, следовательно, $\alpha = 30°$, откуда $\angle BCA = 60°$.

Треугольник $LNK -$ прямоугольный, поэтому $AL = \frac{1}{2}NK = NA = CH$. $ALHC -$ равнобедренная трапеция, значит $\angle BAC = \angle BCA = 60°$. Из доказанного следует, что треугольник $ABC -$ равносторонний.

Задание 5. (20 баллов) Известно, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Известно, что каждый эльф является либо рыцарем, либо лжецом. Несколько эльфов выстроены в ориентированную с севера на юг колонну. Каждый эльф в колонне смотрит на север или на юг. Каждого эльфа спросили, чётно ли число лиц рыцарей, обращённых к нему. Можно ли по этой информации определить чётность количества рыцарей в колонне?

Решение: Предположим, что восстановить четность количества рыцарей в колонне нельзя. Это означает, что для некоторого набора ответов эльфов существует не менее двух вариантов того, кто из них рыцарь, а кто лжец, и при этом варианты отличаются чётностью количества рыцарей. Пусть в первом варианте оказалось чётное число рыцарей, тогда во втором – нечётное.

Назовём инверсией операцию замены одного рыцаря на лжеца или наоборот. Заметим, что инверсия одного любого эльфа изменяет чётность числа рыцарей, значит для получения второго набора эльфов из первого нужно применить инверсию нечётное число раз. Рассмотрим произвольного инвертированного эльфа. Его ответ может смениться только при его инвертировании и при инвертировании эльфа, лицо которого обращено к данному. Поскольку ответы эльфов во втором наборе такие же, как и в первом, а при инвертировании эльф меняет ответ на противоположный, то среди эльфов, лица которых обращены к данному, инвертированными должны оказаться нечётное их количество.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются инвертированные эльфы, а рёбра соединяют пары эльфов, смотрящих друг на друга. Из вышесказанного следует, что вершин в графе нечётное число, и степень каждой вершины также является нечётным числом. Но по лемме о рукопожатиях следует, что такого графа не существует. Значит наше предположение ошибочно, и чётность количества рыцарей в колонне восстанавливается однозначно.

2 вариант

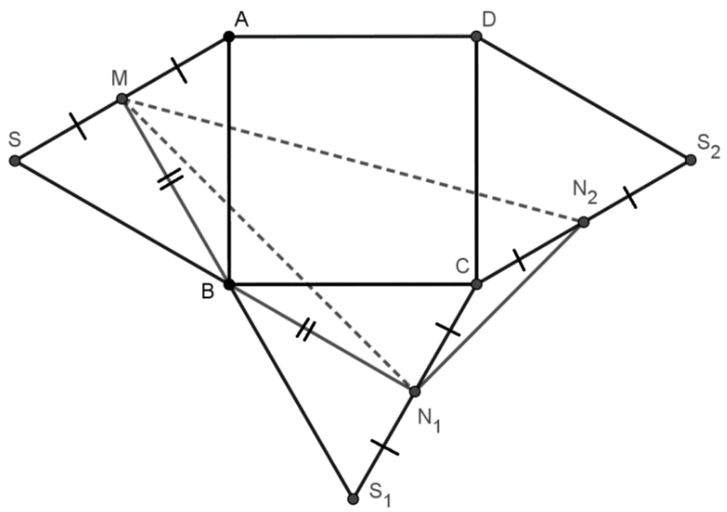
Задание 1. (20 баллов) Про монотонно возрастающую функцию $f(x)$, определённую для всех ненулевых x, известно, что $f\left(x+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$. Найдите все такие функции $f(x)$.

Решение: Поскольку функция $f(x)$ строго возрастает, каждое значение оно можно принимать не более одного раза. Значит $x+f\left(\frac{1}{x}\right)=c$. Заменяя x на $\frac{1}{x}$, получаем $f(x)=c-\frac{1}{x}$, где c — некоторая константа. Подставим полученную функцию в исходное уравнение и получим $f\left(x+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=c-\frac{1}{x+f\left(\frac{1}{x}\right)}=c-\frac{1}{x+c-x}=c-\frac{1}{c}=0$, откуда $c=\pm1$ и искомые функции $f(x)=\pm1-\frac{1}{x}$.

Задание 2. (20 баллов) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Все рёбра пирамиды имеют одну и ту же длину, равную 10. Таракан, двигаясь только по поверхности пирамиды, перебрался из середины ребра SA в середину ребра SC, при этом успев побывать на основании $ABCD$. Какова минимально возможная длина пути, пройденного тараканом?

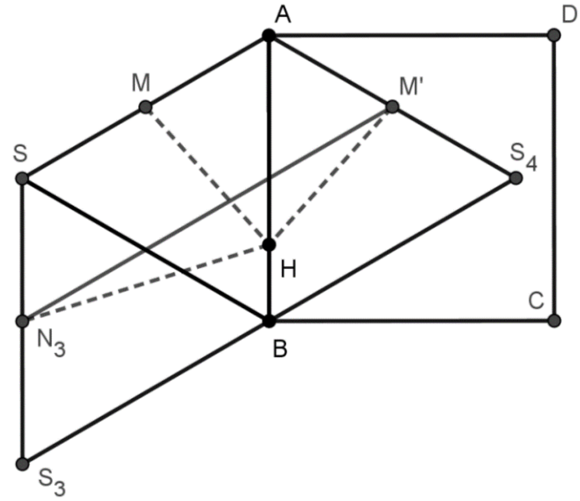
Решение: **Решение:** Сделаем развёртки пирамиды. Пусть M — середина ребра SA. Без ограничения общности, пусть таракан попал на основание $ABCD$ через ребро AB. Тогда до середины ребра SC мы можем добраться тремя способами:

1) Перейдя на соседнюю грань через ребро BC.
2) Перейдя на противоположную грань через ребро CD.
3) Перейдя на грань SBC через ребро SB.



В первых двух случаях кратчайший путь на развёртке будет являться отрезком. При первом случае обозначим вершину пирамиды S как S_1, при втором – S_2, а середины рёбер S_1C, S_2C — N_1 и N_2 соответственно.

Рассмотрим первый случай. По условию BM и BN_1 — медианы равносторонних треугольников, а значит $BM=BN_1=5\sqrt{3}$. $\angle CBN_1=\angle ABM=30°$, откуда $\angle MBN_1=150°$. По теореме косинусов, $MN_1=\sqrt{MB^2+BN_1^2-2cos\angle MBN_1\cdot MB\cdot BN_1}=5\sqrt{6+3\sqrt{3}}$.



Рассмотрим второй случай. Заметим, что треугольник CN_1N_2 – равнобедренный, причём $\angle N_1CN_2 = 150°$, откуда $\angle CN_1N_2 = 15° = \angle BN_1M$. Поэтому $\angle MN_1N_2 = \angle BN_1C = 90°$, следовательно, MN_1 – гипотенуза прямоугольного треугольника MN_1N_2, а значит $MN_2 > MN_1$.

Рассмотрим третий случай. Обозначим вершину пирамиды S как S_3, а середину ребра $S_3C - N_3$. Пусть траектория таракана пересекла ребро AB в точке H. Построим равносторонний треугольник ABS_4. Пусть M' – середина стороны AS_4. В силу симметрии следует, что длина пути $MH + HN_3$ равна $M'H + HN_3$. Поэтому длина пути будет минимальной, когда точки M', H и N_3 будут лежать на одной прямой. Тогда длина пути будет равна длине отрезка $M'N_3$, являющегося средней линией трапеции SAS_4S_3, а именно $M'^{N_3} = \frac{1}{2}(AS + S_4S_3) = 15$.

Разобрав все возможные случаи, делаем вывод, что кратчайшая длина пути таракана равна 15.

Задание 3. (20 баллов) Вписанный четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \times CD = BC \times AD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD – в точке F. Оказалось, что $BE = CD$, $DF = BC$. Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Решение: Обозначим $BE = CD = x, BC = DF = y, AB = z, AD = t, \angle BEC = \alpha, \angle BAD = \beta$. Тогда поскольку $ABCD-$ вписанный, получаем $S_{BCE} = S_{CDF} = \frac{1}{2}xysin\alpha, S_{AED} = S_{ABF} = \frac{1}{2}(x+z)tsin\beta = \frac{1}{2}(t+y)zsin\beta$, откуда $(x+z)t = (t+y)z$, то есть $xt = yz$. По условию $xz = yt$; перемножив два последних равенства, получаем $x^2tz = y^2tz$, откуда $x = y$, а значит $z = t$. В итоге получаем, что $x + z = y + t$, а значит в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Задание 4. (20 баллов) Решите уравнение: $\frac{10}{x+10} + \frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \ldots \frac{10!}{(x+10)(x+9)\ldots(x+1)} = 11$.

Решение: Индукцией по n докажем, что

$\frac{n}{x+n} + \frac{n(n-1)}{(x+n)(x+n-1)} + \ldots + \frac{n!}{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+1)} = \frac{n}{x+1}$.

База индукции: при $n = 1$ равенство, очевидно, верно.

Шаг индукции: пусть при $n = k$ верно равенство

$\frac{k}{x+k} + \frac{k(k-1)}{(x+k)(x+k-1)} + \ldots + \frac{k!}{(x+k)(x+k-1)\ldots(x+1)} = \frac{k}{x+1}$.

Рассмотрим $n = k+1$. $\frac{k+1}{x+k+1} + \frac{(k+1)k}{(x+k+1)(x+k)} + \ldots + \frac{(k+1)!}{(x+k+1)(x+k)\ldots(x+1)} = \frac{k+1}{x+k+1}\left(1 + \frac{k}{x+k} + \frac{k(k-1)}{(x+k)(x+k-1)} + \ldots + \frac{k!}{(x+k)(x+k-1)\ldots(x+1)}\right) = \frac{k+1}{x+k+1}\left(1 + \frac{k}{x+1}\right) = \frac{k+1}{x+1}$, что и требовалось доказать.

По доказанному, исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{10}{x+1} = 11$. Его корнем является $x = -\frac{1}{11}$.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Задание 5. 20 (баллов) Петя покрасил клетки квадратной доски размером 8×8 клеток в два цвета. Вася выбирает цвет, 2 строки и 2 столбца и считает суммарное количество клеток выбранного им цвета в этих строках и столбцах. Какое наибольшее суммарное количество клеток Вася гарантированно может получить, какую бы раскраску не выбрал Петя?

Решение: Без ограничения общности пусть клеток чёрного цвета не меньше 32, тогда можно оставить только 32 из них и максимум, естественно, не увеличится. Соответственно, будем решать задачу для ровно 32 чёрных клеток.

Пусть мы можем выбрать две строчки, в которых суммарно n чёрных клеток. Тогда в остальных 6 строках $32 - n$ чёрных клеток, которые находятся в 8 столбцах из 6 клеток. По принципу Дирихле среди них можно выбрать два столбца, в которых не меньше $(32 - n)/4$ чёрных клеток. Получится не меньше $n + (32 - n)/4 = 8 + 3n/4$, что строго больше 15, если n хотя бы 10. Следовательно, если можно выбрать две строки/столбца, в которых суммарно не менее 10 чёрных клеток, то можно выбрать крест с не менее, чем 16 чёрными клетками.

Теперь предположим, что в любых двух строчках и любых двух столбцах не более 9 чёрных клеток. Тогда:

1) Не может быть строки или столбца с 6 и более клетками чёрного цвета, так как тогда по принципу Дирихле найдётся строка с 4 и более клетками чёрного цвета.
2) Не может быть двух строк или двух столбцов с 5 чёрными клетками.

Следовательно, набор количества чёрных клеток в строках/столбцах может быть либо 54444443, либо 44444444 чёрных клеток, то есть существует не менее 6 строк, в которых ровно 4 чёрных и 4 белых.

Пусть во всех столбцах по 4 чёрных клетки. Рассмотрим три любые строки из 6, в которых по 4 белых клетки. Найдутся две строки, в двух столбцах которых только белые клетки (так как в противном случае белые клетки есть минимум в 4+3+2 = 9 столбцах). Так как в этих столбцах по 4 черных клетки, то суммарно в выбранных строчках и этих столбцах найдутся 16 черных клеток. Аналогично поступим, если во всех строках по 4 черные клетки.

Если же и в строках, и в столбцах количества чёрных клеток равны 54444443, то выберем строчку и столбец, в которых по 5 чёрных клеток, т.е. суммарно не менее 9. Среди 7 остальных столбцов есть не менее двух, которые пересекаются с выбранной строкой по белой клетке, и среди этих двух есть не менее одного столбца, в котором ровно 4 чёрных клетки. Точно так же среди остальных 7 строк найдется хотя бы одна такая, в которой ровно 4 чёрных клетки, а с первым выбранным столбцом она пересекается по белой. Выбранная строка может пересечься по чёрной клетке со вторым выбранным столбцом, поэтому она добавит не более чем 3 чёрные клетки. Добавим эти строку и столбец к выбранным. Итого в них не менее 9+4+3 = 16 черных клеток. В итоге мы доказали, что Вася может гарантированно выбрать 16 клеток одного цвета.

Примером того, что выбрать больше 16 клеток у Васи не всегда получится, является шахматная раскраска. В каждой строке и в каждом столбце ровно по 4 белых и 4 чёрных клетки, значит в любых 2 столбцах и 2 строках суммарно будет выбрано не более, чем $4 \cdot 4 = 16$ одноцветных клеток.