1 вариант

Время выполнения задания – 240 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Про положительные числа a и b известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}=1$. Докажите, что $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$.

Решение: Подставим выражение из условия вместо единицы правой дроби того, что надо доказать: $\frac{1}{a+b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}}{a+b}=\frac{a+b}{ab(a+b)}+\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+b)^2}$, что и требовалось доказать.

Задание 2. (20 баллов) Могут ли часовая, минутная и секундная стрелки часов в некоторый момент времени разделить циферблат на три равные части?

Решение: Предположим, что такое могло произойти. За то время, когда часовая стрелка прошла x часов, минутная и секундная прошли соответственно $12x$ и $720x$ часов. Заметим, что если уменьшить скорости всех стрелок на одну и ту же величину, то попарные расстояния между ними через x часов не изменятся, так как не изменятся скорости их удаления. Поэтому можно считать, что часовая стрелка стоит на месте, а за то время, когда минутная стрелка проходит $11x$ часов, секундная проходит $719x$ часов. Ситуация, указанная в условии задачи, могла произойти тогда и только тогда, когда стрелки находились на отметках 4 часа и 8 часов; то есть количества пройденных ими часов имеют вид $12n+4$ и $12k+8$, где $n,k-$ целое количество часов. Имеем $730x=12n+12k+12=12(n+k+1)$, следовательно, $x=\frac{6(n+k+1)}{365}$.

Если $11x=12n+4$, то $\frac{66(n+k+1)}{365}=12n+4$ или $1394=66k-4314n$.

Если $11x=12n+8$, то $\frac{66(n+k+1)}{365}=12n+8$ или $2854=66k-4314n$.

В обоих равенствах правая часть делится на 3, а левая – нет. Ни одно из равенств не выполняется, а значит наше предположение ошибочно, и ситуация, указанная в условии задачи, не могла произойти.

Задание 3. (20 баллов) На окружности в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1001. Для каждой пары соседних чисел посчитали их сумму. Могли ли все суммы оказаться квадратами простых чисел?

Решение: Предположим, что так расставить числа получилось. Пусть $p_1^2, p_2^2, \dots, p_{1001}^2 -$ получившиеся попарные суммы, где $p_1, p_2, \dots, p_{1001} -$ простые. Заметим, что сумма всех чисел равна $\frac{(1+2+\ldots+1001)+(1001+1000+\ldots+1)}{2}=\frac{1001\times1002}{2}=1001\times501$, из чего следует, что она имеет остаток 1 при делении на 4. Тогда $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{1001}^2=2\times1001\times501\equiv2(mod\,4)$. Квадраты чисел могут давать лишь остатки 0 и 1 при делении на 4. Если не более одного квадрата нацело делятся на 4, то сумма $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{1001}^2$ может дать лишь остаток 0 или 1 при делении на 4, значит таких квадратов не менее двух. Единственное простое число, квадрат которого делится на 4 – это 2. Но его квадрат нельзя представить в виде суммы двух различных чисел двумя различными способами. Значит наше предположение неверно и расставить числа таким образом невозможно.

Задание 4. (20 баллов) Точку пересечения медиан треугольника соединили отрезками с каждой из его вершин, разделив его на три треугольника. Один из меньших треугольников оказался подобен исходному. Найдите наибольшую сторону исходного треугольника, если его наименьшая сторона равна $10\sqrt{3}$.

Решение: Пусть в треугольнике ABC точка $M-$ точка пересечения его медиан. Известно, что все треугольники, на которые отрезки разбили искомый треугольник, имеют одинаковую площадь, в 3 раза меньшую площади треугольника ABC. Пусть треугольник AMB оказался подобен исходному треугольнику. Тогда коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{3}$. $\angle AMB > \angle ACB$, поэтому без ограничения общности, положим $\angle AMB = \angle BAC$. Так как $\angle ABC > \angle ABM$, то по остаточному принципу $\angle ABC = \angle BAM, \angle ACB = \angle ABM$. Из этого заключаем, что $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{MB} = \sqrt{3}$, откуда $AM \times BC = AB^2 = 3AM^2$, то есть $BC = 3AM$. Пусть $D-$ точка пересечения медианы AM со стороной BC. Тогда $AD = \frac{3}{2}AM$, а значит $BC = 2AD$, следовательно, $\angle BAC = 90°$.

Пусть $AB = x$, тогда $BC = \sqrt{3}x$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{2}x$. Сторона AB, очевидно, наименьшая из сторон треугольника ABC, а $BC -$ наибольшая, поэтому $AB = 10\sqrt{3}$, откуда следует, что $BC = 30$.

Задание 5. (20 баллов) Найдите все натуральные значения n, при которых все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе была равна произведению чисел в другой.

Решение: Невозможность разбиения при $n = 1, n = 2, n = 4$ проверяется небольшим перебором. При всех остальных значениях n это можно сделать.

Пример: При $n = 3$. В одной группе число $\{3\}$, в другой – $\{1,2\}$.

При $n = 2k$. В одной группе числа $\left\{1, \frac{n-2}{2}, n\right\}$, в другой – все остальные.

При $n = 2k + 1$. В одной группе числа $\left\{1, \frac{n-1}{2}, n-1\right\}$, в другой – все остальные.

В первом случае произведение чисел в первой группе равно $\frac{n(n-2)}{2}$. Сумма всех оставшихся чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + n - \left(1 + \frac{n-2}{2} + n\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$.

Во втором случае произведение чисел в первой группе равно $\frac{(n-1)^2}{2}$. Сумма всех оставшихся чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + n - \left(1 + \frac{n-1}{2} + n - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{2}$.

2 вариант

Задание 1. (20 баллов) Алёна расставила в равенстве $* + ** + *** + ****$ вместо звёздочек цифры от 0 до 9 (каждую по одному разу) так, что значение полученного выражения оказалось точным квадратом. Какое наибольшее число могла получить Алёна?

Решение: Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45 и делится на 9, значит и квадрат получившегося числа обязан делиться на 9. Заметим, что данная сумма не превосходит числа $9 + 98 + 987 + 9876 = 10970$, что меньше числа $105^2 = 11025$. Следующий квадрат, делящийся на 9 – это $102^2 = 10404$. Его можно получить, например, следующим образом: $3 + 52 + 741 + 9608 = 10404$.

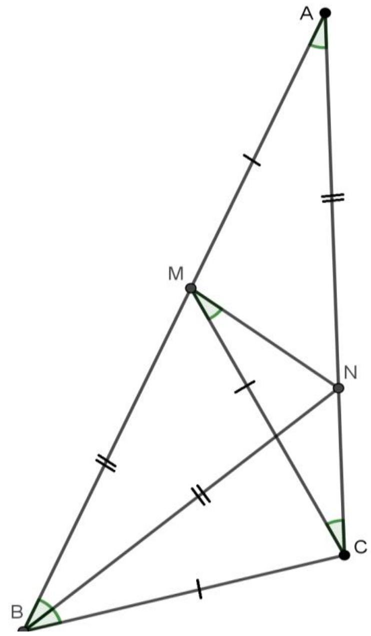
Ответ: 10404

Задание 2. (20 баллов) Различные натуральные числа a, b, c, d таковы, что числа $ab + cd$ и $ac + bd$ являются простыми. Верно ли, что число $ad + bc$ также является простым?

Решение: Неверно. Например, при $a = 5, b = 7, c = 8, d = 13$ получаем, что $ab + cd = 139 -$ простое, $ac + bd = 131 -$ простое, $ad + bc = 121 -$ не простое.

Задание 3. (20 баллов) На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM = MC = CB, MB = BN = NA$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение: По условию задачи, треугольники ABN и AMC – равнобедренные с общим углом A при основании, а значит $\angle A = \angle ABN = \angle ACM = \alpha$. $\angle BMC = \angle A + \angle ACM = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AMC, а так как треугольник BMC – равнобедренный по условию, $\angle MBC = 2\alpha$, откуда $\angle NBC = \alpha$. Треугольники AMN и CBN равны по двум сторонам и углу между ними, из чего следует равенство сторон MN и NC, а из этого – равнобедренность треугольника MNC, то есть $\angle NCM = \angle NMC = \alpha$. $\angle BMN = 3\alpha$ и $BM = BN$, значит $\angle BNM = 3\alpha$. По сумме углов треугольника BMN получаем $180° = \angle BMN + \angle BNM + \angle MBN = 3\alpha + 3\alpha + \alpha = 7\alpha$, откуда $\alpha = \frac{180°}{7}$. Значит $\angle BAC = \frac{180°}{7}, \angle ABC = \frac{360°}{7}, \angle ACB = \frac{720°}{7}$.



Задание 4. (20 баллов) Максим придумал новый аналог игры в крестики-нолики на доске 3×3: каждым своим ходом игрок ставит свой символ (крестик или нолик) в две пустые клетки; если осталась одна клетка, то первый игрок ставит туда свой символ. Проигрывает игрок, поставивший три своих символа (крестика или нолика) в один ряд. Может ли кто-то из игроков гарантировать свой выигрыш, независимо от действий другого игрока?

Решение: Пусть первый игрок ходит крестиками, второй – ноликами. Рассмотрим несколько случаев.

1) Первый игрок своим первым ходом ставит крестики в две противоположные боковые клетки (см. рис. 1). Тогда второй игрок своим ходом ставит нолики в тот же столбец, что и один из поставленных крестиков. Если первый игрок поставит крестик в центр, то проиграет. Значит он может поставить либо по одному крестику в верхнюю и нижнюю строку, тогда второй своим ходом ставит нолики в те же разные строки, либо оба крестика в одну из строк (пусть это будет верхняя строка), тогда второй своим ходом ставит нолики в центральный столбец и первый проигрывает.

0		
×		×
0		

Рис. 1

2) Первый игрок своим первым ходом ставит крестики не в две противоположные боковые клетки. Тогда найдутся две клетки, указанные на рис. 2, в которые второй своим первым ходом сможет поставить нолики. Если после второго хода первого игрока обе угловые клетки, указанные на рис.2, будут заняты, то второй может проиграть только если один из поставленных им во второй ход ноликов будет в центре. Но к этому моменту остаётся три клетки, две из которых точно центральные. Второй игрок ставит в эти клетки нолики, и первый проигрывает.

		×
		0
×	0	

Рис. 2

3) Если хотя бы одна из угловых клеток, указанных на рис. 2, после двух ходов первого игрока осталась свободной, то второй своим вторым ходом ставит нолик в эту угловую клетку (пусть это будет правая верхняя угловая клетка), и, если это возможно, в одну из помеченных (числами) на рис. 3 клетку. Несложно видеть, что после любого из этих ходов второй игрок не проиграл, а среди оставшихся клеток, доставшихся первому игроку, всегда найдутся три крестика в ряд.

	4	0
2	3	0
1	0	

Рис. 3

4) Если указанную в предыдущем варианте расстановку четвёртого нолика проделать не удастся, то это означает, что все нумерованные клетки заняты крестиками. Тогда второй игрок своим вторым ходом ставит нолики так, как показано на рис. 4, и первый игрок вновь проигрывает.

0	×	
×	×	0
×	0	0

Рис. 4

Все остальные случаи отличаются лишь поворотом или симметрией. Поэтому вне зависимости от действий первого игрока, второй всегда сможет гарантировать себе победу.

Задание 5. (20 баллов) При каком наибольшем натуральном n на доску размером 8×8 клеток можно поставить n ладей и $3n$ слонов так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую?

Решение: Докажем, что $n < 4$. От противного: предположим, что $n \geq 4$, тогда нам удалось поставить не менее 4 ладей и 12 слонов, не бьющих друг друга. Покрасим доску шахматной раскраской в два цвета – белый и чёрный. Количество диагоналей в каждом из направлений, которые в дальнейшем мы будем называть главным и побочным, 15 штук. В каждом из направлений можно поставить не более 14 слонов, поскольку в угловых одноцветных клетках слоны одновременно стоять не могут. Это сразу исключает случаи $n \geq 5$, и достаточно рассмотреть случай $n = 4$. Каждый из слонов бьёт одну главную и одну побочную диагональ, поэтому при удачной расстановке слонов непобитыми могут остаться клетки лишь двух главных и двух побочных диагоналей. Не поставленные на доску ладьи не могут располагаться на тех же диагоналях, что и слоны, поэтому их можно разместить лишь на оставшихся двух главных и двух побочных диагоналях. Так как ладей всего 4, это означает, что они располагаются во всех 4 клетках попарного пересечения главных диагоналей с побочными, что в таком случае влечёт одноцветность всех 4 оставшихся диагоналей. Для определённости будем считать, что эти диагонали покрашены в чёрный цвет.
Поставленные ладьи бьют 4 различных вертикали и горизонтали, значит не побитых ими клеток 16 штук – по 4 в каждой непобитой горизонтали и вертикали, причём чёрных и белых клеток поровну. Поставленные ранее 12 слонов должны располагаться в 7 из 8 непобитых белых клетках, так как они бьют 7 диагоналей в каждом направлении.
Рассмотрим максимальную по количеству клеток диагональ, покрашенную в белый цвет. На ней расположены 8 белых клеток, а поставленные ладьи бьют всего лишь 4 её клетки, значит из 8 непобитых ладьями белых клеток ровно 4 принадлежат указанной диагонали. Но на ней не может располагаться более одного слона, поэтому расставить слонов на 7 из 8 белых клеток не удастся, из чего следует невозможность случая $n = 4$.
Пример для $n = 3$:

		с	с		с		с
л							
						л	
	л						
							с
		с	с	с			с