1 вариант

Время выполнения задания – 240 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) В турнире по баскетболу каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Ничьих в процессе турнира не было. Оказалось, что команда-победитель выиграла матчей на два больше, чем каждая из оставшихся команд. Сколько команд могло участвовать в турнире?

Решение: Пусть в турнире участвовало n команд, причём команда-победитель выиграла k матчей. Тогда каждая из оставшихся $n-1$ команд выиграла по $k-2$ матча. Всего между командами состоялось $\frac{n(n-1)}{2}$ матчей, в которых суммарно было $\frac{n(n-1)}{2}$ побед. С другой стороны, суммарное число побед всех команд равно $k+(n-1)(k-2)$. Значит $k+(n-1)(k-2)=\frac{n(n-1)}{2}$ или $kn=2(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+4)(n-1)}{2}$, откуда $k=\frac{(n+4)(n-1)}{2n}$. k является целым числом, следовательно, $2k=\frac{(n+4)(n-1)}{n}=n-3-\frac{4}{n}$ – целое число, а значит $\frac{4}{n}$ – целое, что возможно лишь при $n=1, n=2, n=4$.

При $n=1$ матчей не было.

При $n=2$ число $k=\frac{3}{2}$, что не является целым.

При $n=4$ число $k=3$.

Пример: Занумеруем команды числами 1, 2, 3, 4. Команда 1 выиграла у всех, команда 2 выиграла и команды 3, команда 3 выиграла и команды 4,
команда 4 выиграла и команды 2.

Задание 2. (20 баллов) Докажите, что уравнение $\mathbf{p^3+q^2-r=pqr}$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах.

Решение: Пусть $q=1$, тогда $p^3+1=pr+r$. Поскольку $p\neq -1$, равенство эквивалентно $p^2-p+1=r$. Троек натуральных чисел $(p,1,p^2-p+1)$ бесконечно много.

Задание 3. (20 баллов) Максим написал на доске произвольный многочлен $\boldsymbol{P(x)}$ с целыми коэффициентами. Антон, не глядя на доску, сказал, что какое бы натуральное число $\boldsymbol{n}$ не назвал Максим, среди выражений $\boldsymbol{P(1), P(1)+P(2), P(1)+P(2)+P(3), \dots}$ обязательно найдётся число, кратное $\boldsymbol{n}$. Прав ли Антон?

Решение: Пусть $P(x)=a_mx^m+a_{m-2}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Для любого одночлена a_ix^i (в том числе для константы) и для любых натуральных чисел k,n разность $a_i\big((k+n)^i-k^i\big)$ делится на n. Многочлен состоит из суммы одночленов указанного вида, поэтому верно $P(k+n)-P(k) \vdots n$. Это означает, что все числа вида $P(k+in)$, где $i\in\mathbb{Z}$, имеют одинаковый остаток при делении на n. Следовательно, $P(k)+P(k+n)+\ldots+P(k+(n-1)n)\equiv\ nP(k)\equiv 0\ (mod\, n)$. Отсюда получаем $\big(P(1)+P(2)+\ldots+P(n)\big)+\big(P(n+1)+P(n+2)+\ldots+P(2n)\big)+\ldots+\Big(P\big((n-1)n+1\big)+P\big((n-1)n+2\big)+\ldots+P(n^2)\Big)\equiv n\big(P(1)+P(2)+\ldots+P(n)\big)\equiv 0\ (mod\, n)$.

Задание 4.(20 баллов) На плоскости дан треугольник $\boldsymbol{ABC}$ и точка $\boldsymbol{M}$. Основания перпендикуляров, опущенных из точки $\boldsymbol{M}$ на прямые $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$, лежат вне треугольника. Основание перпендикуляра, опущенного на $\boldsymbol{BC}$, лежит на стороне $\boldsymbol{BC}$, причём точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{M}$ лежат по разные стороны от $\boldsymbol{BC}$. Известно, что расстояние от точки $\boldsymbol{M}$ до стороны $\boldsymbol{BC}$ равно длине стороны $\boldsymbol{BC}$, а расстояния до прямых, содержащих стороны $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$, равны соответственно длинам сторон $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$. Найдите все значения, которые может принимать тангенс угла $\boldsymbol{A}$.

Решение: Из условия задачи следует, что площади треугольников ABM, ACM, BCM равны соответственно $\frac{AB^2}{2}, \frac{AC^2}{2}, \frac{BC^2}{2}$. Заметим, что $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} - S_{BCM} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = AB \times AC \times \cos A$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$, откуда $\cos A = \frac{1}{2}\sin A$, а значит $tgA = 2$.

Треугольник и точка с такими свойствами существуют, например, когда $AC = 1, BC = 2, AB = \sqrt{5}$. Построим точку M с указанным в задаче свойством. Пусть H – середина BC, тогда $\mathrm{BH} = \mathrm{HC} = \mathrm{AC} = 1$. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную AB. Точку пересечения этой прямой с серединным перпендикуляром к стороне BC обозначим M. Эта точка – искомая. Действительно, в силу того, что $\mathrm{AC}||\mathrm{HM}$, расстояние от M до прямой AC равно длине отрезка CH, который равен AC. Несложно видеть, что $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BMH}$, из чего следует равенство треугольников ABC и BMH по катету и острому углу. А значит $\mathrm{BM} = \mathrm{AB}, \mathrm{MH} = \mathrm{CB}$ и точка M – искомая.

Задание 5. (20 баллов) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 20. Какое наименьшее количество чисел можно стереть с доски, чтобы никакие три из оставшихся не являлись последовательными членами геометрической прогрессии? Напомним, что три числа образуют геометрическую прогрессию, если квадрат второго из них равен произведению первого на третье.

Решение: Ответ 5 чисел.

Пример: 4, 6, 9, 10, 12.

Оценка: Пусть мы стёрли не больше 4 чисел. Значит на доске осталось не меньше 16 чисел. Посмотрим, какие числа могли остаться. Числа 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19 не могут участвовать ни в каких прогрессиях, поэтому их вычёркивание ни на что не повлияет, а лишь увеличит ответ. Осталось 13 чисел, среди которых надо оставить не меньше девяти чисел. Разобьём 12 из этих чисел на следующие тройки: (1, 3, 9); (2, 6, 18); (4, 8, 16); (5, 10, 20). Числа в каждой тройке составляют геометрическую прогрессию, а значит из каждой тройки мы можем оставить не более 2 чисел, то есть всего не более 8 чисел. Следовательно, число 12, не вошедшее ни в одну тройку, должно остаться на доске.

Прогрессии, содержащие число 12 следующие: (3, 6, 12); (9, 12, 16); (8, 12, 18). Число 12 точно осталось на доске, значит из каждой тройки помимо числа 12 должно остаться не более одного числа, то есть суммарно из всех троек мы можем оставить на доске не более 4 чисел. Надо оставить ещё не менее 5 чисел, которые можно выбирать только среди чисел 1, 2, 4, 5, 10, 20. Однако, выбирая не менее 5 чисел, на доске останется одна из прогрессий (1, 2, 4) или (5, 10, 20), чего быть не может. Таким образом, стереть с доски меньше 5 чисел нельзя.

2 вариант

Задание 1. (20 баллов) Существует ли такое натуральное значение n, при котором система уравнений $\begin{cases} x^n - nx + n = 0 \\ x^{2n} - 2nx + n = 0 \end{cases}$ имеет целочисленное решение?

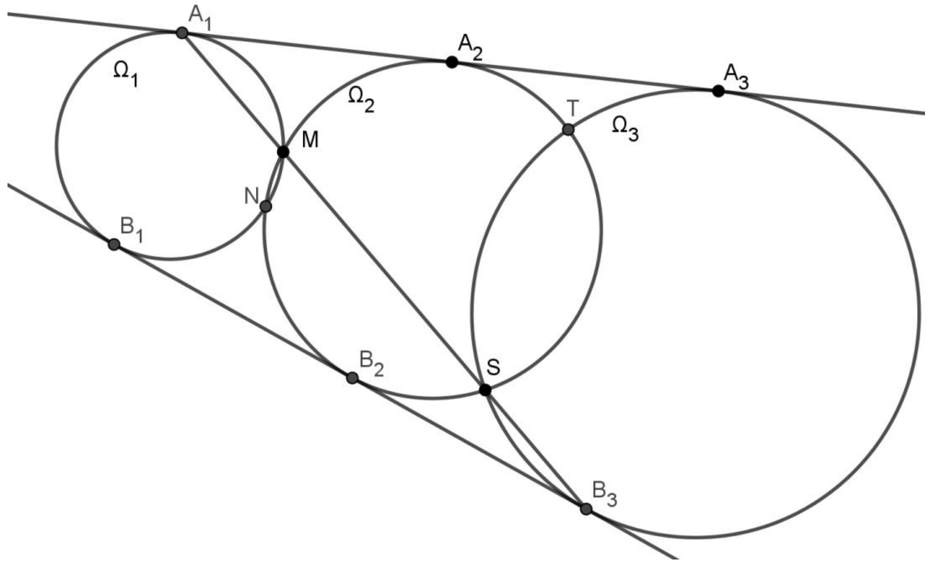
Решение: Очевидно, что $x = 0$ не является решением системы. Заметим, что решением системы может являться лишь положительное число, иначе все слагаемые во втором уравнении будут положительными. Поэтому $x \geq 1$, а значит $x^n \geq 1$. Умножим первое уравнение системы на 2 и вычтем из второго. Получим $x^{2n} - 2x^n - n = 0$ или $(x^n - 1)^2 = n + 1$, откуда $x^n = 1 + \sqrt{n+1}$. Подставив в первое уравнение, получим $n + 1 + \sqrt{n+1} = nx$ или $x = \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n} = 1 + \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$. Если $x -$ целое, то $\frac{1+\sqrt{n+1}}{n} -$ целое. Если $\frac{1+\sqrt{n+1}}{n} \geq 1$, то $\sqrt{n+1} > n - 1$, $n + 1 > n^2 - 2n + 1, n(n - 3) < 0$. Это означает, что выражение $\frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$ не может являться целым числом при $n \geq 3$, значит достаточно рассмотреть случаи $n = 1$ и $n = 2$. При подстановке этих значений в выражение $\frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$ получаем нецелые числа, следовательно, система не имеет целочисленных решений ни при каких натуральных n.

Задание 2. (20 баллов) Вовочка считает число *необыкновенным*, если оно представимо в виде $a^{a+1} + a^{a-1} + \frac{1}{2}$, где $a -$ простое число, большее 3. Вовочка хочет найти два различных необыкновенных числа, сумма которых являлась бы точным квадратом. Сможет ли он это сделать?

Решение: Из условия следует, что число $a -$ нечётное и не делится на 3. Значит a^{a+1} и $a^{a-1} -$ квадраты чисел, не кратных трём. Такие квадраты дают остаток 1 при делении на 3. Предположим, что нашлись числа b и c такие, что сумма чисел $b^{b+1} + b^{b-1} + \frac{1}{2}$ и $c^{c+1} + c^{c-1} + \frac{1}{2}$ является точным квадратом. Но $b^{b+1} + b^{b-1} + \frac{1}{2} + c^{c+1} + c^{c-1} + \frac{1}{2} \equiv 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} \equiv 2 \ (mod\ 3)$, что неверно для квадратов натуральных чисел. Следовательно, Вовочке не удастся найти такие числа.

Задание 3. (20 баллов) Три окружности $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ возрастающих радиусов вписаны в один угол. Пусть $A_1, A_2, A_3 -$ точки их касания с одной из сторон угла, а $B_1, B_2, B_3 -$ с другой стороной. Пусть окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках M и N, а окружности Ω_2 и $\Omega_3 -$ в точках T и S. Оказалось, что точки A_1, M, S, B_3 лежат на одной прямой. Найдите отношение отрезков $A_1M{:}\,MS{:}\,MB_3$.

Решение:



Пусть $A_1M = x, MS = y, SB_3 = z, A_1A_2 = a, A_2A_3 = b$. Из соображений симметрии, отрезки общих касательных, заключённые между одинаковыми окружностями, имеют равные длины, то есть $B_1B_2 = a$, $B_2B_3 = b$. По теореме о произведении отрезков секущих имеем: $A_1M \cdot A_1S = A_1A_2{}^2, A_1S \cdot A_1B_3 = A_1A_3{}^2, B_3S \cdot B_3M = B_3B_2{}^2, B_3M \cdot B_3A_1 = B_3B_1{}^2$ или в наших обозначениях $x(x+y) = a^2, (x+y)(x+y+z) = (a+b)^2$, $z(z+y) = b^2, (z+y)(z+y+x) = (b+a)^2$. Из этого следует, что $(z+y)(z+y+x) = (x+y)(x+y+z)$, а значит $x = z$. Тогда $x(x+y) = z(z+y)$, следовательно $a = b$. Подставляя x вместо z и a вместо b, получаем систему $\begin{cases} x(x+y) = a^2 \\ (x+y)(2x+y) = 4a^2 \end{cases}$, откуда $\frac{2x+y}{x} = 4$ или $y = 2x$. Из доказанного следует, что $A_1M : MS : MB_3 = x : y : (y+z) = x : 2x : 3x = 1 : 2 : 3$.

Задание 4. (20 баллов) Волшебный медальон представляет собой идеальный круг диаметром 3 дюйма, в периметр которого вставлены 14 драгоценных камней так, что соседние находятся на равном расстоянии друг от друга; в центр медальона помещён еще один камень. В качестве камней используются рубины, сапфиры и изумруды; различить два камня одного типа невозможно. Какое наибольшее количество таких медальонов может существовать, если во всём мире не найдётся двух одинаковых?

Решение: Центральный камень при этом можно вставить любой, так что для подсчёта количества различных медальонов посчитаем количество вариантов расстановки драгоценных камней по периметру, а затем умножим его на 3. Всего вариантов заполнения периметра 3^{14} по правилу произведения. Однако некоторые из них могут повторяться в том смысле, что одна и та же последовательность камней может быть выстроена с разных позиций по периметру. Иными словами, при сдвиге каждого камня на одно и то же число позиций по периметру, медальон не изменит своего вида. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $a, m -$ натуральные взаимно простые числа. Тогда среди чисел $a, 2a, 3a, \dots, (m-1)a$ встречаются все ненулевые остатки при делении на m.

Доказательство. При делении на m существуют всего $(m-1)$ ненулевых остатков. Чисел в наборе $a, 2a, 3a, \dots, (m-1)a$ тоже $(m-1)$. Поэтому утверждение леммы эквивалентно тому, что все числа набора дают разные остатки при делении на m. Докажем это:

От противного. Предположим, что нашлись различные числа k, n из набора $1, 2, \dots, m-1$ такие, что ka и na имеют одинаковые остатки при делении на m. Это означает, что $(k-n)a \,\vdots\, m$, что в силу взаимной простоты a и m влечёт $(k-n) \,\vdots\, m$. Поскольку $0 < k, n < m$, их разность делится на m только тогда, когда они совпадают, что противоречит нашему предположению. Значит все числа набора имеют различные остатки при делении на m, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы следует, что если при повороте камней на число a, взаимно простое с 14, медальон не изменится, то все камни в медальоне одинаковые, так как камень на позиции a совпадёт с камнями на позициях $2a, 3a, \dots, (m-1)a$, то есть со всеми оставшимися. Поэтому при подсчёте всех возможных медальонов повториться могли только те, которые не изменяются при повороте на 2 или 7 позиций. Медальоны не могут быть сразу двух указанных типов, так как иначе они бы не менялись при повороте на 9 позиций, что влечёт одинаковость всех камней. Посчитаем отдельно количество различных медальонов данных типов.

1) При повороте на 2 позиции медальон не изменился, следовательно, все камни на чётных позициях совпадают, и все камни на нечётных позициях тоже. Это значит, что медальон однозначно задаётся двумя несовпадающими камнями. Всего вариантов задать его $3 \cdot 2 = 6$. При подсчёте общего количества каждый такой медальон учитывался дважды (так как можно заполнять камни с одной из двух задающих медальон позиций).

2) При повороте на 7 позиции медальон не изменился. Аналогично предыдущему пункту, любой такой медальон задаётся 7 камнями, среди которых не все одинаковые. Всего вариантов задать его $3^7 - 3$. При подсчёте общего количества каждый такой медальон учитывался семь раз (аналогично рассуждениям при повороте на 2).

Исключим повторяющиеся комбинации из общего количества и получим, что всего возможных медальонов могло быть $3\left(3^{14} - \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{6}{7} \cdot (3^7 - 3)\right) = 3(3^{14} - 1875) = 3^{15} - 3^2 \cdot 5^4$.

Задание 5. (20 баллов) При каком наибольшем натуральном n на доску размером 8×8 клеток можно поставить n ладей и $3n$ слонов так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую?

Решение: Докажем, что $n < 4$. От противного: предположим, что $n \geq 4$, тогда нам удалось поставить не менее 4 ладей и 12 слонов, не бьющих друг друга. Покрасим доску шахматной раскраской в два цвета – белый и чёрный. Количество диагоналей в каждом из направлений, которые в дальнейшем мы будем называть главным и побочным, 15 штук. В каждом из направлений можно поставить не более 14 слонов, поскольку в угловых одноцветных клетках слоны одновременно стоять не могут. Это сразу исключает случаи $n \geq 5$, и достаточно рассмотреть случай $n = 4$. Каждый из слонов бьёт одну главную и одну побочную диагональ, поэтому при удачной расстановке слонов непобитыми могут остаться клетки лишь двух главных и двух побочных диагоналей. Не поставленные на доску ладьи не могут располагаться на тех же диагоналях, что и слоны, поэтому их можно разместить лишь на оставшихся двух главных и двух побочных диагоналях. Так как ладей всего 4, это означает, что они располагаются во всех 4 клетках попарного пересечения главных диагоналей с побочными, что в таком случае влечёт одноцветность всех 4 оставшихся диагоналей. Для определённости будем считать, что эти диагонали покрашены в чёрный цвет.

Поставленные ладьи бьют 4 различных вертикали и горизонтали, значит не побитых ими клеток 16 штук – по 4 в каждой непобитой горизонтали и вертикали, причём чёрных и белых клеток поровну. Поставленные ранее 12 слонов должны располагаться в 7 из 8 непобитых белых клетках, так как они бьют 7 диагоналей в каждом направлении.

Рассмотрим максимальную по количеству клеток диагональ, покрашенную в белый цвет. На ней расположены 8 белых клеток, а поставленные ладьи бьют всего лишь 4 её клетки, значит из 8 непобитых ладьями белых клеток ровно 4 принадлежат указанной диагонали. Но на ней не может располагаться более одного слона, поэтому расставить слонов на 7 из 8 белых клеток не удастся, из чего следует невозможность случая $n = 4$.

Пример для $n = 3$:

		с	с		с		с
л							
						л	
	л						
							с
		с	с	с			с