Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Некоторые задачи разбиты по пунктам, каждый из которых оценивается независимо, однако если Вы уверены, что Ваше решение подходит под несколько пунктов, можете явно написать об этом в решении. Если во время решения задачи вам понадобится вычислять какие-то степени или факториалы, например 3^{21} *или* $100!$, *то можете оставлять их в решении как есть. Не забывайте также, что для всех задач вам нужно приводить не только ответ, но и обоснование, иначе баллы за задачу не будут засчитаны. Работу следует выполнять в бланке ответов.*

Задание 1. (25 баллов) Как-то раз Пин разработал инновационное средство, которое должно было раз и навсегда справиться с сорняками в огороде Копатыча. Но вот незадача, Пин гораздо лучше разбирается в электронике, чем в садоводстве, что-то пошло не так, и сорняки стали расти ещё сильнее. Теперь в огороде Копатыча N больших сорняков и M маленьких.

Крош и Ежик вызвались помочь Копатычу победить сорняки, но просто пропалывать грядки для ребят слишком скучно, поэтому они решили сыграть в игру. За ход можно сделать одно из действий:

- вырывает один большой сорняк или один маленький сорняк. В этом случае ничего не происходит.
- срывает два маленьких сорняка, тогда вырастает один большой. В этом случае вырастает один большой сорняк.

Проигрывает тот игрок, который не может сделать ход. Первым ходит Крош.

Ответьте на следующие вопросы и приведите обоснования:

1.1. Кто побеждает при оптимальной игре при N = 6 и M = 0? (2 балла)

1.2. Кто побеждает при оптимальной игре при N = 1275289 и M = 0? (5 баллов)

1.3. Кто побеждает при оптимальной игре при N = 0 и M = 123456? (6 баллов)

1.4. Кто побеждает при оптимальной игре при N = 77832467 и M = 2020? (12 баллов)

Задание 2. (25 баллов) Пин проводит серию экспериментов с искусственным интеллектом для Железной Няни. Поведение этого искусственного интеллекта характеризуется двумя параметрами: заботливость и трудолюбие. Каждый из параметров может принимать натуральные значения. В результате предыдущих экспериментов, Пин выяснил, что если наибольший общий делитель заботливости и трудолюбия отличен от 1, то Механическая Няня начинает маниакально нянчить всех вокруг.

В первый день экспериментов Пин выбирает значения заботливости и трудолюбия. Каждый следующий день Пин прибавляет 1 либо к заботливости, либо к трудолюбию.

2.1. Существуют ли такие начальные значения трудолюбия и заботливости, что Пин сможет провести 1000000 дней экспериментов без маниакальной заботы няни? (5 баллов)

2.2. Сможет ли Пин подобрать изначальные значения заботливости и трудолюбия большие 10 так, чтобы существовала возможность провести 10 дней экспериментов без маниакальной заботы? (5 баллов)

2.3. Сможет ли Пин подобрать изначальные значения заботливости и трудолюбия большие 10, чтобы существовала возможность провести 2020 дней экспериментов без маниакальной заботы? (7 баллов)

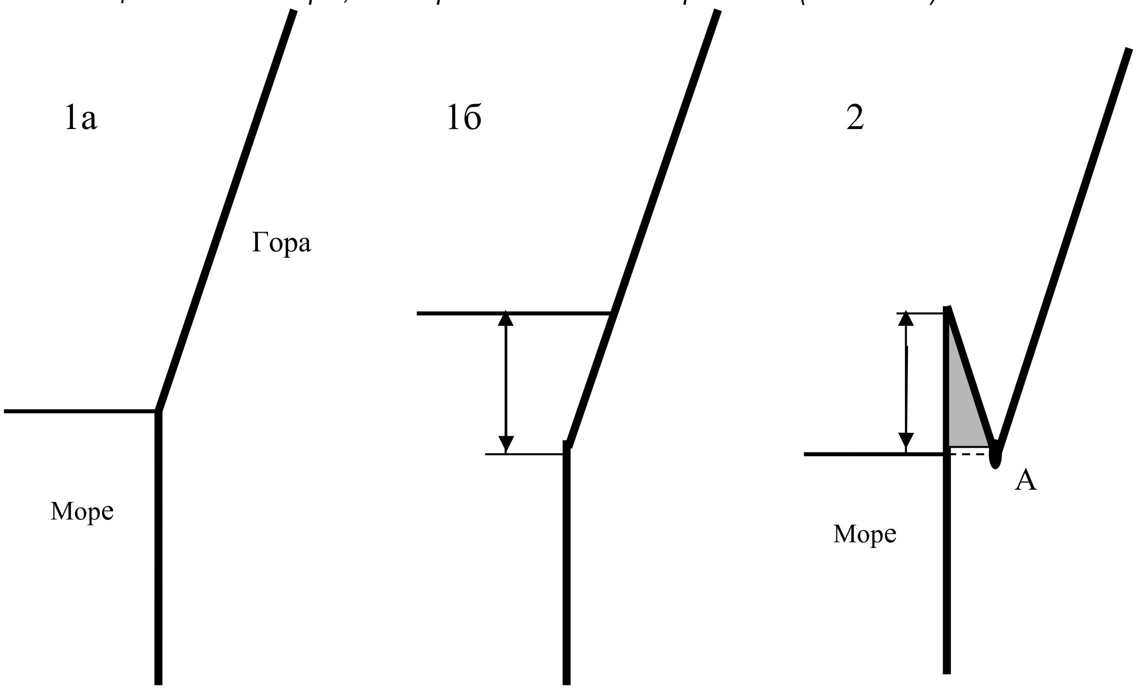
2.4. Сможет ли Пин подобрать изначальные значения заботливости и трудолюбия большие 10, чтобы существовала возможность провести 10^{100} *дней экспериментов без маниакальной заботы? (8 баллов)*

Задание 3. (25 баллов) Карыч только начал разбираться в геологии. Сейчас он изучает возникновение рельефа в долине Смешариков. Он знает, что давным-давно от самого берега моря поднималась к небу гора, склон которой шёл под углом 45 градусов к горизонту (см. рис. 1а). За каждый миллион лет гора опускается в море на 1 метр (см. рис. 1б). Карычу известно, что иногда в долине происходили землетрясения. После землетрясения вся часть горы, которая находится под морем, отражается относительно уровня моря. Первое известное ему произошло как раз через первый миллион лет после появления горы. На рисунке 2 показано то, как выглядела долина Смешариков после этого землетрясения.

Следующее землетрясение произошло через 2 миллиона лет после первого, еще одно через 4 миллиона лет после второго, следующее - через 8 миллионов лет после третьего. Таким образом, между N-м и (N+1)-м землетрясениями проходило 2^N миллионов лет.

На самом деле Карыч не просто так решил заняться геологией. Просто он услышал, что в той части горы, которая побывала под морем может быть нефть. А разве нефть бывает лишней?

Кар-Карыч точно знает, что объем залежей нефти как-то связан с площадью сечения горы, но пока не знает как именно. Ему это еще предстоит выяснить, а пока он просит вас посчитать эту площадь!
На рисунке 2 - это площадь закрашенного треугольника.
3.1. Найдите площадь сечения горы если случилось только 2 землетрясения. (3 балла)
3.2. Назовём подножием горы точку в сечении, после которой высота горы только возрастает, если удаляться от моря (на рисунке 2 это точка А). Найдите расстояние от моря до подножия горы, если прошло 10 землетрясений. (7 баллов)
3.3. Найдите площадь сечения горы, если произошло 8 землетрясений. (15 баллов)



Задание 4. (25 баллов) У Копатыча в улье живет 2^N пчел, по своему обыкновению пчелы вылетают из улья группами по пять особей. Копатыч считает, что две группы пчел похожи тогда и только тогда, когда существуют ровно три пчелы, которые принадлежат этим двум группам. Копатыч предполагает, что в улье существует всевозможные группы по пять пчел, и ему очень интересны ответы на следующие вопросы:
4.1. Сколько всего групп пчел существует в улье при N=10? (3 балла)
4.2. Сколько всего пар похожих групп существует при N = 2020, если порядок внутри пары не имеет значения? (22 балла)
Он бы мог посчитать и сам, но ему не очень хочется беспокоить улей своим присутствием, да и никто не хочет быть лишний раз ужаленным, Копатыч в том числе, так что помогите ему ответить на эти непростые вопросы!

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Некоторые задачи разбиты по пунктам, каждый из которых оценивается независимо, однако если Вы уверены, что Ваше решение подходит под несколько пунктов, можете явно написать об этом в решении. Если во время решения задачи вам понадобится вычислять какие-то степени или факториалы, например 3^{21} *или* $100!$*, то можете оставлять их в решении как есть. Не забывайте также, что для всех задач вам нужно приводить не только ответ, но и обоснование, иначе баллы за задачу не будут засчитаны. Работу следует выполнять в бланке ответов.*

Задание 1. (25 баллов) Нюша очень любит делать фотографии. Особенно она любит фотографировать по-настоящему красивые вещи. Например, себя. Нюша выбрала некоторое четное число N и каждый день с 1 по N делала по одной фотографии себя.

Однако фотографии, которые просто лежат в одной куче - это не круто с её точки зрения. Поэтому она хочет собрать все N фотографий в альбом. На каждой странице альбома располагается по одной фотографии.

По древней традиции своей семьи Нюша считает, что альбом получился *разнообразным*, если между каждыми двумя фотографиями двух последовательных дней располагается хотя бы (N / 2) - 1 $(N/2)-1$ других фотографий. А если между такими фотографиями располагается хотя бы N / 2 фотографий, то она считает его *идеальным*.

Например, фотографии располагаются следующим образом: 1, 2, 3, 4. Тогда между 1 и 3 находится одна фотография, а между 1 и 4 находится две фотографии. Для того, чтобы альбом был *разнообразным* между 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 фотографиями должно находится хотя бы по 1 фотографии. Если между 1 и 2, 2 и 3 и 3 и 4 будет хотя бы по 2 фотографии, то альбом будет *идеальным.*

Сможет ли Нюша собрать

1.1. разнообразный альбом, если N=8? (2 балла)

1.2. разнообразный альбом при N=10000? (8 баллов)

1.3. идеальный альбом, если N=10000? (15 баллов)

Задание 2. (25 баллов) У Лосяша есть три любимые звезды, за которыми он наблюдает в свой телескоп по ночам. Для того, чтобы никто не узнал за какими звездами он наблюдает, он присвоил им номера 1, 2 и 3. Лосяш ведет записи о том, за какой звездой он наблюдал в каждый из дней (в каждый день он наблюдает ровно за одной звездой), но для пущей секретности он не просто записывает номера наблюдаемых звезд, а шифрует их следующим образом:

1) В нулевой день (дни нумеруются с 0) Лосяш просто записывает номер планеты, за которой он наблюдал.
2) В день с номером i, Лосяш записывает значение следующего выражения $A\ xor\ (i+p)$, где A — число, которое записал Лосяш в предыдущий день, а p — номер планеты, за которой сегодня наблюдал Лосяш.

Чтобы доказать, что его шифр идеален, Лосяш хочет *ответить на следующие вопросы:*

2.1. Какие числа выпишет Лосяш, если будет в нулевой день наблюдать за планетой с номером 1, в первый день за планетой с номером 2, а во второй день за планетой с номером 3? (3 балла)

2.2. Какое минимальное неотрицательное число не может выписать он на второй день, какие бы наблюдения он не вел? (5 баллов)

2.3. Существует ли хотя бы 1000 последовательностей наблюдений длиной 100 дней, которые не расшифровываются однозначно по числу, выписанному последним? То есть для каждой такой последовательности наблюдений должна существовать другая отличная от нее последовательность такая, что числа, записанные для них в девяносто девятый день равны. (9 баллов)

2.4. Существует ли хотя бы 10^{45} последовательностей наблюдений из 101 дня, для которых последнее число совпадает? (8 баллов)

<u>*Примечание:*</u> a xor b (где a и b — неотрицательные целые числа) — операция, значение, которой вычисляется следующим образом:

1) Выписываются двоичное представление чисел a и b
2) В результирующем числе в i-ом разряде будет стоять 1, тогда и только тогда, когда, либо в двоичной записи a, либо в двоичной записи b, но не одновременно, в i-ом разряде стоит 1, в противном случае, там стоит 0.

Таким образом, $1\ xor\ 2\ = 01_2\ xor\ 10_2\ =\ 11_2\ =\ 3$, но $7\ xor\ 2\ = 111_2\ xor\ 010_2\ = 101_2\ =\ 5$

Задание 3. (25 баллов) Всем известно, что у Карыча есть закрытый архив. И никто, кроме него, не знает, сколько же там книг и документов.
Карыч располагает книги по полкам необычным образом. Он считает, что N книг должны занимать S(N) полок, где S(N) - это количество делителей числа N (включая 1 и N). Например, S(6) равняется 4.
Совунья хочет узнать число книг в архиве. Однако Кар-Карыч не хочет просто так разглашать конфиденциальную информацию, так как переживает за судьбу своих книг. Вместо этого он согласился отвечать на вопросы: "Сколько бы полок занимали твои книги, если бы их было в K раз больше?", где K - натуральное число.
Известно, что книг в секретной библиотеке не больше 30.
Сможет ли Совунья узнать сколько книг у Карыча за 10 вопросов? (25 баллов)

Задание 4. (25 баллов) В улье Копатыча живет N пчел, и каждую из них он знает “в лицо”. Для удобства Копатыч пронумеровал всех пчел числами от 1 до N. Известно, что пчелы общаются с помощью танца. Перед тем как начать танцевать пчелы выстраиваются в линию в произвольном порядке. Каждая пчела танцует столько секунд, сколько пчел с номером большим (x+1) находится правее неё, при этом пчелы не хотят отнимать друг у друга эту сладкую «минуту славы», поэтому никакие две пчелы не танцуют одновременно. Пчелы испытывают чувство вины за то, что постоянно кусают Копатыча (но ведь он сам просит!) и хотят подобрать наиболее красивый танец, но, к сожалению, для этого придется попробовать всевозможные расстановки пчел в линию. Пчелам очень интересно успеют ли они до осени станцевать в каждой расстановке хотя бы раз, или нужно придумывать другой способ извиниться перед Копатычем, поэтому помогите им и *посчитайте сколько будет идти репетиция.*
4.1. N = 4 (5 баллов)
4.2. N = 2020 (20 баллов)

Примечание: при N = 3 пчелы могут выстроиться следующими способами:

1) 1 2 3 2) 1 3 2 3) 2 1 3 4) 2 3 1 5) 3 1 2 6) 3 2 1

Для первого способа (1 2 3) длительность танца первой пчелы равняется 1, второй пчелы 0, третьей пчелы 0. Суммарное время танца всех пчел для этой расстановки равняется 1. *Ваша задача состоит в том, чтобы посчитать суммарную длительность танца по всем возможным перестановкам пчел.*

Разбор 10-11 класс

Замечание: Решения участников, которые не описаны в разборе или критериях, оценивались исходя из полных баллов по усмотрению жюри.

Задача 1

1) В этом пункте было достаточно привести пример. Для $N = 8$ подходит последовательность $[7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2]$.

***Критерии оценки*:** за любой правильный ответ ставилось 2 балла.
Неправильный ответ - 0 баллов.

2) Пусть любая фотография, сделанная в день $2x$ (x - целое), расположена на странице $N - x + 1$. Так как x лежит в $[1; N/2]$, то все чётные расположены на позициях с номерами из $[N/2 + 1; N]$. Так как количество элементов в этих отрезках совпадает и разным чётным числам соответствуют разные позиции, то для каждой позиции из второй половины альбома существует ровно одна фотография четного дня, которая там расположена.
Пусть любая фотография, сделанная в день $2x + 1$ (x - целое), расположена на странице $(N - 2x)/2$. Так как x лежит в $[0; N/2 - 1]$, то все нечетные будут расположены на позициях $[1; N/2]$. Повторим рассуждения из предыдущего пункта.
Теперь у нас есть расположение фотографий в альбоме. Покажем, что оно разнообразно.
Рассмотрим произвольное нечетное число $2x + 1$. Оно расположено на позиции $(N - 2x)/2$. Фотография следующего дня расположена на позиции $(N - x + 2)$. Рассмотрим разность этих двух значений: $N - x + 2 - N/2 + x = N/2 + 2$. Значит, между этими фотографиями находится $N/2 + 1$ другая фотография.
Рассмотрим произвольное четное число $2x$, отличное от N. Оно расположено на позиции $(N - x + 1)$. Фотография следующего дня расположена на странице $(N - 2x)/2$. Разность между ними равна $N/2 + 1$, то есть между ними $N/2$ фотографий.
Таким образом, альбом разнообразный.

***Критерии оценки*:** ответ без обоснования не оценивался.
Решения, в которых строят пример по аналогии с первым пунктом, но без полного доказательства корректности, оценивались от 0 до 4 баллов, в зависимости от наличия части доказательства.

3) Предположим, что мы смогли составить идеальный альбом.
Заметим, что у любой фотографии есть фотография в следующий или предыдущий день. Назовем такую фотографию соседней.
Рассмотрим фотографию дня X на позиции $N/2$. Так как альбом идеальный, то между X и соседней к ней фотографии должно быть не менее $N/2 + 1$ других фото. Тогда соседняя фотография расположена либо левее позиции $N/2 - (N/2 + 1) = -1$, либо правее

позиции $N / 2 + (N / 2 + 1) = N + 1$. Обе этих ситуации невозможны, а значит наше предположение неверно.

Критерии оценки: частичные баллы ставились при неточностях в рассуждениях.

Задача 2

1. За эти три дня Лосяш выпишет номера 1, 2, 7, чтобы получить ответ нужно было аккуратно посчитать каждое из чисел по предложенному алгоритму.

Критерии оценки: при неправильном ответе за подпункт ставилось 0 баллов; полный балл можно было получить только если дан правильный ответ и какое-нибудь обоснование к нему, например расчеты. В случае отсутствия обоснования ставилась половина баллов.

2. Заметим, что все числа от 0 до 7 имеют в своей двоичной записи три цифры, а с помощью операции xor из них невозможно получить двоичное число длиной четыре цифры, так как нет переноса разряда. Минимальное число, состоящее в двоичной записи из четырех цифр — 8. Далее нужно было показать, что любое натуральное число и 0 меньшее 8 можно было получить описанным в задаче способом.
Также валидным является решение с полным перебором всех возможных последовательностей наблюдений из трех дней.

Критерии оценки: в случае неправильного ответа подзадача оценивалась в 0 баллов. Если был дан правильный ответ, но не приведено никакого обоснования или приведено некорректное обоснование, подзадача оценивалась в 0 баллов. За арифметические ошибки решение штрафовалось на целое положительное количество баллов вплоть до половины от максимального балла за подпункт.

3. Пусть Лосяш в нулевой день наблюдал за второй планетой, а в первый день наблюдал за первой планетой, тогда он выпишет в нулевой день число 2, а в первый день 2 xor (1 + 1) = 0. Можно показать, что аналогичное число он выпишет, если будет наблюдать в нулевой день за третьей планетой, а в первый день за второй. Таким образом мы имеем две различные последовательности длины два, которые дают одно и тоже число. Теперь, если продолжить каждую из этих последовательностей одинаковым образом, то на 100 день получим две различные последовательности (так как первые два дня различаются) дающие одно и то же число. Оценим количество таких последовательностей: в каждый из дней от с номерами от 3 до 99 (то есть 97 дней) мы можем независимо выбирать любую из трех планет, значит всего таких последовательностей наблюдений 3^{97}.
$1000 < 1024 = 2^{10} < 3^{10} < 3^{97}$. Значит хотя бы 1000 последовательностей удовлетворяющих условию существуют.

Критерии оценки: Жюри допускает, что существуют и другие верные решения этого подпункта, каждое из них оценивалось в индивидуальном порядке. В данном варианте решения важным было заметить, что существуют последовательности маленькой длины, которые имеют одинаковый результат и после этого верно оценить количество длинных последовательностей, обе этих части оценивались в половину баллов от максимального количества за подпункт.

4. Заметим, что в результате операции *xor* количество разрядов в двоичной записи результата не превышает количество разрядов в двоичной записи операндов.
Более того, если у нас есть последовательность $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, каждый из элементов которой меньше 2^k , то и $(X_1\ xor\ X_2\ \ldots\ xor\ X_n)$ будет меньше 2^k (доказательство этого факта оставим участникам).
В каждый из 101 дня значение $(i\ +\ p)$ не превосходит 128. Значит и число в последний день не превосходит 128.
Всего различных последовательностей наблюдений - 3^{101}. Действительно, для каждого из дней существует по три варианта наблюдений в этот день.
По принципу Дирихле найдется такое значение, что существует 3^{101} / 2^7 (округленное вниз) последовательностей наблюдений, заканчивающихся на это значение.
Осталось показать, что 3^{101} / 2^7 больше, чем 10^{45}.
$$3^{101} / 2^7 \ >\ 3^{101} / 3^5\ =\ 3^{96}\ =\ 81^{24}\ >\ 80^{24} =\ 10^{24}\ *\ 2^{72}\ >\ 10^{24}\ *\ 1024^7\ >\ 10^{24}\ *\ 1000^7\ =\ 10^{45}$$

Критерии оценки: небольшие баллы снимались за арифметические ошибки.

Задача 3

Первым вопросом положим k = 1. Таким образом мы узнаем количество делителей в искомом числе. Обозначим ответ при фиксированном k за S_k.
Обозначим простые числа от 1 до 30 за p_1, p_2, …, p_{10} (их всего 10). Искомое число представимо в виде $\prod\limits_{1}^{10} p_i^{\alpha_i}$, где α_i - целое неотрицательное число.
S_1 = $(\alpha_1 +\ 1)(\alpha_2 +\ 1)...(\alpha_{10} +\ 1)$
Положим k равным p_2, …, p_9. Рассмотрим S_k / S_1 = $(\alpha_k\ +\ 2\,) / (\alpha_k\ +\ 1)$. Отсюда выражается $\alpha_k =\ (2S_1\ -\ S_k) / (S_k\ -\ S_1)$. Таким образом, мы нашли степени всех простых от 2 до 23 в разложении нашего числа. Так как мы знаем S_1, то мы можем найти и степень 29, поделив его на $(\alpha_1 +\ 1)(\alpha_2 +\ 1)...(\alpha_9 +\ 1)$.
Для того, чтобы найти число не превышающее 30, достаточно знать степени простых от 2 до 29 в его разложении, что мы и нашли ранее.

Критерии оценки: Переборное решение оценивалось исходя из полного балла, дыры в решении оценивались на усмотрение жюри.

Задача 4

Выведем формулу для решения обоих подпунктов. Для начала посчитаем ответ без учета ограничения на пчел с соседними номерами. Далее не будем делать разницы между пчелами и числами. Зафиксируем пару чисел, одно из них обязательно больше другого, значит существует ровно один способ упорядочить эту пару так, чтобы меньшая пчела танцевала на одну минуту дольше. Выберем позиции для этой пары, это можно сделать

$N \cdot (N-1) \cdot \frac{1}{2}$ способами, после того как позиции зафиксированы, оставшихся пчел можно разместить как угодно, то есть $(N-2)!$ способами. Таким образом фиксированная пара вносит в общее время ожидания $N \cdot (N-1) \cdot (N-2)! \cdot \frac{1}{2}$ секунд. Выбрать пару можно опять же $N \cdot (N-1) \cdot \frac{1}{2}$ способами. Отсюда получаем, что пчелы суммарно протанцевали бы $N^2 \cdot (N-1)^2 \cdot (N-2)! \cdot \frac{1}{4}$ секунды, если бы не ограничение на пчел с соседними номерами. Чтобы получить ответ на задачу, нужно вычесть из этого количества суммарное время, которое внесли пчелы с соседним номерами.
Рассуждения абсолютно аналогичны общему случаю, только теперь у нас есть только $(N-1)$ способ выбрать пчел с соседними номерами без учета порядка. Таким образом время, которое танцуют все соседние пчелы равняется $2N \cdot (N-1)^2 \cdot (N-2)! \cdot \frac{1}{4}$ (для удобства домножили и разделили выражение на на 2).
Отсюда итоговый ответ: $N^2 \cdot (N-1)^2 \cdot (N-2)! \cdot \frac{1}{4} - 2N \cdot (N-1)^2 \cdot (N-2)! \cdot \frac{1}{4}$
Упрощая выражение получаем:
$(N-2)! \cdot N \cdot (N-1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (N-2) = N! \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \frac{1}{4}$
Отдельно стоит показать, что никакая секунда в данном решении не посчитана дважды. Для этого заметим, что хоть перестановки в данном решении повторяются для разных пар, но каждый раз мы учитываем эту перестановку для либо различных пар, либо различных позиций одной и той же пары.

Подставляя нужные значения N в формулу можно получить ответы на оба подпункта. Стоит отметить, что ограничения на первый подпункт позволяли перебрать все перестановки руками и для каждой из них посчитать время танца.

Критерии оценки: В данной задаче существуют несколько комбинаторных решений, в них оценивались общие для всех комбинаторных задач вещи: правильность ответа, правильность рассуждений и применения комбинаторных формул подходов. Так, например, при решении комбинаторных задач важной частью является доказательство того, что никакой комбинаторный объект не учтен дважды. Отсутствие такого доказательства расценивалось как дыра стоимостью до половины баллов. Жюри старалось не штрафовать более, чем на 1-2 балла за ошибки, которые можно было бы списать на опечатки и неаккуратности, а именно такие ошибки, которые не влияют на ход решения, не являются фундаментальными и могут быть легко исправлены для получения полностью верного решения.

Разбор 8-9 класс

Замечание: Решения участников, которые не описаны в разборе или критериях, оценивались исходя из полных баллов по усмотрению жюри.

Задача 1

1. Заметим, что каждый ход уменьшает сумму количеств маленьких и больших сорняков на единицу, значит каждый ход меняется четность этой суммы.
2. Четность номера хода не изменяется для каждого из героев (так как они ходят по очереди).
3. Заметим теперь, что четность суммы не меняется для ходов с одинаковой четностью, это следует из того, что у нас на каждом ходу меняется четность хода и четность суммы (пункты 1 и 2)
4. Игрок на чьем ходу $M = N = 0$ — проигрывает (по условию), сумма в этом случае равна 0 и является четной, из пункта 3 получаем, что игрок в чей ход сумма количеств сорняков четная — проигрывает.

Используя вывод в пункте 4, можно решить каждый из подпунктов задачи.

Критерии оценки: Полный балл ставился в случае, если упомянуты и обоснованы все 4 пункта и на их основе сделан правильный вывод, который приводил к правильному ответу. Если решение не содержало хотя бы один из пунктов или было недостаточно обосновано, жюри снимало как минимум половину баллов округленную вниз. Баллы дополнительно снимались (вплоть до 0) за любые другие нестрогости, неточности и ошибки доказательства.

Задача 2

1. Положим один из параметров равным 1, а второй - 2, и будем увеличивать только второй параметр. Заметим, что НОД единицы с любым натуральным числом равен 1, а значит мы никогда не попадем в состояние маниакальной заботы.

Критерии оценки: при отсутствии комментария про то, что НОД(1, x) = 1 ставилась половина баллов.

2. Положим один параметр равным 11, а второй 29. Будем увеличивать первый параметр. Так как 29 - простое число, то для любого натурального $x < 29$ справедливо, что НОД(x, 29) = 1. За десять дней значение первого параметра не превысит 29, и будет равно 21. Таким образом, мы сделали то, что требовалось.

Критерии оценки: При отсутствии пояснений о взаимной простоте простого числа и произвольного меньшего ставилась половина баллов.

3. Положим первый параметр равным 11, а второй - 2039 (простое число). Далее подходят рассуждения из второго пункта.

Критерии оценки: *:* при той же идее при указании составного числа ставилось 0 баллов. В некоторых решениях указывали, что необходимо взять какое-то простое число, большее некоторой константы. Если не было явного упоминания о том, почему это можно сделать, то ставилась половина баллов.

4. В этом пункте нужно сослаться на утверждение о том, что простых чисел бесконечно много. Из этого следует, например, что для любой константы C существует простое число, большее чем C. Тогда для решения этого пункта осталось взять первый параметр равный 11, а второй - простое число, большее чем $10^{100} + 11$ (выше мы показали, что такое существует). Далее подойдет рассуждение из второго пункта.

Критерии оценки: аналогичные пункту 3.

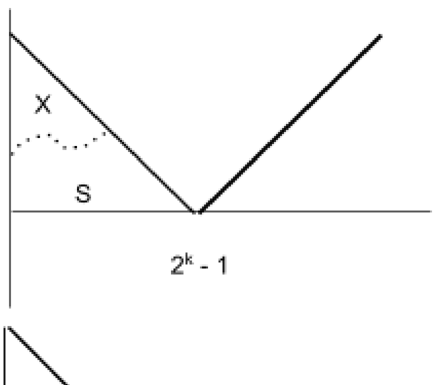
Задача 3

Рассмотрим решение сразу для всех пунктов.
Положим, что точка соприкосновения горы и моря до начала времен имеет координаты (0, 0). Далее горы опускается вдоль оси OY, а при землетрясении часть горы, которая находится ниже OX, отражается относительно этой оси.

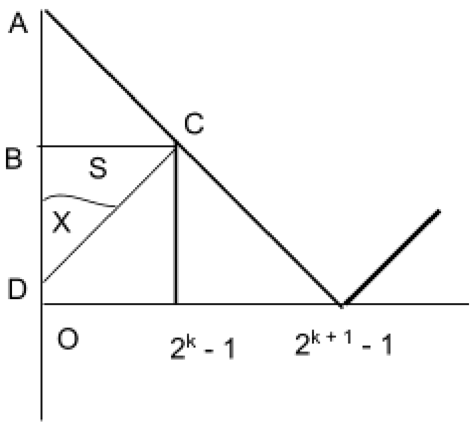
Для начала найдем расстояние от моря до подножия горы.
Докажем по индукции, что после k землетрясений оно равно $2^k - 1$.
База: очевидна. Для k = 0 расстояние равно 1 - 1 = 0.
Пусть наше утверждение выполняется для некоторого k. Покажем, что оно выполняется и при k + 1.

Между k и k+1 произойдет спуск нашей горы на 2^k. Уравнение прямой, которая начинается в подножии горы по предположению индукции было равно $l_1 : y = x - 2^k + 1$
После землетрясения прямая l_1 опустится на 2^k. Её часть, которая оказалась ниже OX отразится, и в точке пересечения этой прямой с OX образуется новое подножие горы.
$l_2 : y = x - 2^k + 1 - 2^k = x - 2^{k+1} + 1$ пересекается с OX в точке $2^{k+1} - 1$. Что и требовалось доказать.

Перед тем, как искать площадь, стоит заметить, что гора после k землетрясений выглядит следующим образом. S - площадь самой горы, X - площадь между горой и прямой $y = 2^k - 1 - x$. Доказать это, опять же, можно по индукции. (оставим это участникам в качестве упражнения).



Теперь посмотрим, как изменится площадь горы после очередного землетрясения: Чтобы найти искомую площадь нужно из площади прямоугольного треугольника с катетом AO вычесть площадь S и площадь треугольника ABC.



Таким образом $2S' = (2^{k+1} - 1)^2 - (2^k - 1)^2 - 2S$. (Нетрудно доказать это утверждение, аккуратно рассмотрев все треугольники)

Мы знаем, что $S_0 = 0$. Далее

$$2S_1 = (2^1 - 1)^2 - (2^0 - 1)^2 - 2S_0 = 1$$
$$2S_2 = (2^2 - 1)^2 - (2^1 - 1)^2 - 2S_1 = 9 - 1 - 1 = 7$$
$$2S_3 = (2^3 - 1)^2 - (2^2 - 1)^2 - 2S_2 = 49 - 9 - 7 = 33$$
$$2S_4 = (2^4 - 1)^2 - (2^3 - 1)^2 - 2S_3 = 225 - 49 - 33 = 143$$
$$2S_5 = (2^5 - 1)^2 - (2^4 - 1)^2 - 2S_4 = 961 - 225 - 143 = 593$$
$$2S_6 = (2^6 - 1)^2 - (2^5 - 1)^2 - 2S_5 = 3969 - 961 - 593 = 2415$$
$$2S_7 = (2^7 - 1)^2 - (2^6 - 1)^2 - 2S_6 = 16129 - 3969 - 2415 = 9745$$
$$2S_8 = (2^8 - 1)^2 - (2^7 - 1)^2 - 2S_7 = 65025 - 16129 - 9745 = 39151$$

Таким образом, ответ: 39151 / 2

Критерии оценки: Баллы снимались за неточности в доказательстве и счете. Ошибки, которые жюри сочло опечатками оценивались в 1-2 балла.

Задача 4

Вне зависимости от варианта, решение не отличается, поэтому возьмем вариант, где группы считаются похожими, если там ровно три “общие” пчелы.

1. Первый пункт решается отдельно от второго, там нужно просто посчитать количество различных групп пчел, порядок внутри группы не важен, значит по определению это количество равно $C_{1024}{}^5$, где $1024 = 2^{10}$ — количество пчел в улье.

Критерии оценки: в случае неправильного ответа пункт оценивался в 0 баллов, если был дан ответ без упоминания формулы сочетаний, то пункт оценивался в половину баллов.

2. Разберем решение второго пункта. Обозначим $X = 2^N = 2^{2020}$, зафиксируем группу из пяти пчел, посчитаем для этой группы количество похожи. Зафиксируем три из пяти выбранных пчел, они будут общими. Это можно сделать $C_5{}^3$ способами. Теперь осталось выбрать двух пчел, которые не входят в пять уже выбранных, потому что мы не можем выбрать пчелу из зафиксированной тройки, так как это будет значить, что внутри новой группы одна и та же пчела встречается дважды; также мы не можем взять одну из оставшихся пчел из пятерки, потому что это будет значить, что у нас группы пересекаются по более, чем трем пчелам, а значит они не похожи. Всего осталось пчел X - 5 и из них нужно выбрать две, это можно сделать $C^2{}_{X-5}$ способами. Получаем, что для фиксированной группы похожих на нее ровно $C^3{}_5 \cdot C_{X-5}{}^2$. Группу из пяти пчел мы можем выбрать $C_X{}^5$ способами и количество похожих групп для фиксированной группы равно $C^3{}_5 \cdot C_{X-5}{}^2$, значит ответ равняется $C_X{}^5 \cdot C^3{}_5 \cdot C_{X-5}{}^2 \cdot \frac{1}{2}$. Ответ нужно домножить на $\frac{1}{2}$, так как каждую пару мы учитываем дважды, когда считаем количество похожих для первой группы в паре и когда для второй.

Критерии оценки: В данной задаче существуют несколько комбинаторных решений, в них оценивались общие для всех комбинаторных задач вещи: правильность ответа, правильность рассуждений и применения комбинаторных формул подходов. Так, например, при решении комбинаторных задач важной частью является доказательство того, что никакой комбинаторный объект не учтен дважды. Отсутствие такого доказательства расценивалось как дыра стоимостью до половины баллов. Жюри старалось не штрафовать более, чем на 1-2 балла за ошибки, которые можно было бы списать на опечатки и неаккуратности, а именно такие ошибки, которые не влияют на ход решения, не являются фундаментальными и могут быть легко исправлены для получения полностью верного решения.