Математика 8-9 класс

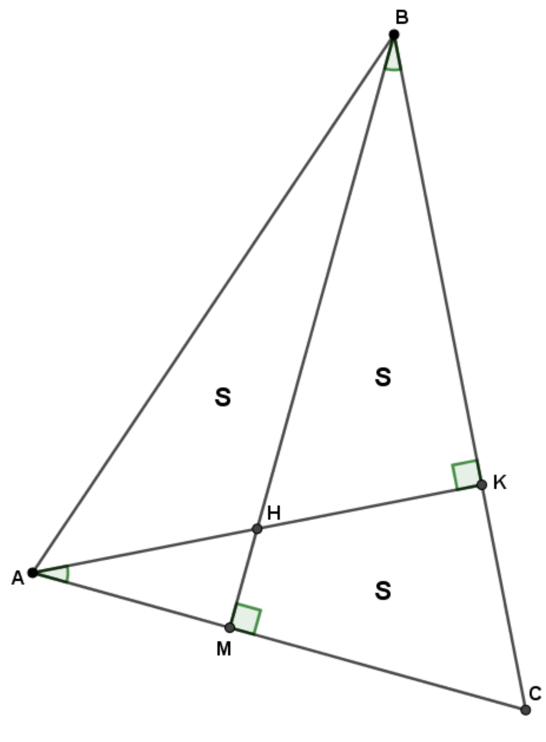
1. Существует ли четырёхугольник, все внутренние углы которого выражаются числом градусов, являющимся натуральной степенью числа 2? (15 баллов)

   Решение: Существует. Например, четырёхугольник с углами $8°, 32°, 64°$ и $256°$.

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AK. Обозначим через H точку пересечения высот треугольника ABC. Известно, что площади треугольников AKC, AHB и BHK оказались равными. Найдите $\angle ABC$. (15 баллов)

   Решение: Обозначим площади треугольников AKC, AHB и BHK через S.

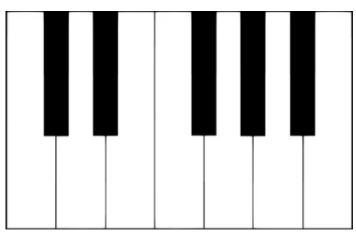
   Поскольку $S = S_{AHB} = \frac{1}{2}AH \cdot BK = S_{BHK} = \frac{1}{2}HK \cdot BK$, то $AH = HK$. Также заметим, что $S_{ABK} = \frac{1}{2}AK \cdot BK = 2S = 2S_{AKC} = AK \cdot KC$, откуда $BK = 2KC$. Продлим высоту BH до пересечения со стороной AC в точке M. Треугольники BHK и AKC прямоугольные с общим углом при вершине C, значит $\angle KAC = \angle KBH$. Поэтому треугольники BHK и AKC подобны по двум углам, а раз их площади равны, то равны и сами треугольники, то есть $AK = KB$. Треугольник AKB – равнобедренный и прямоугольный, поэтому $\angle ABC = 45°$.

   Ответ: $\angle ABC = 45°$.

   Замечание: Равенство площадей треугольников AHB и BHK не является необходимым для решения задачи, но позволяет доказывать утверждение задачи разными способами.

3. Саша решил сыграть на одной из октав фортепиано, состоящей из 7 белых и 5 чёрных клавиш (см. рисунок), все возможные аккорды, состоящие из трёх клавиш, такие, что никакие две клавиши аккорда не соприкасаются, и в любом аккорде есть хотя бы одна чёрная клавиша. Сколько всего аккордов сыграет Саша? (15 баллов)

   Решение: Посчитаем количество всех возможных аккордов из трёх клавиш. Всего их будет $C_{12}^3 = 220$. Вычтем из него количество аккордов, в которых соприкасаются две клавиши. Такие аккорды состоят из двух типов:

Первый тип: каждая клавиша аккорда соприкасается с какой-то другой клавишей. Посчитаем все такие аккорды по группам:

1) Все клавиши белые – 5 аккордов.

2) Средняя клавиша чёрная – 5 аккордов.

3) Обе крайние клавиши чёрные – 3 аккорда.

4) Ровно одна крайняя клавиша чёрная – 8 аккордов.

Всего 21 аккорд.

Второй тип: две какие-то клавиши аккорда соприкасаются, а третья не соприкасается ни с какой другой. Также посчитаем количество таких аккордов, разбив их на группы:

1) Все клавиши белые – 20 аккордов.

2) Соприкасающиеся клавиши белые, оставшаяся – чёрная – 17 аккордов.

3) Соприкасающиеся клавиши разного цвета, оставшаяся – белая – 42 аккорда.

4) Соприкасающиеся клавиши разного цвета, оставшаяся – чёрная – 34 аккорда.

Всего 113 аккордов.

Тогда количество аккордов, клавиши которых не соприкасаются, равно $220 - 21 - 113 = 86$. Среди таких аккордов ровно 10, все клавиши которых белые. Значит искомое число аккордов, которые сыграет Саша, равно 76.

Ответ: 76.

4. В каждую клетку шахматной доски 8×8 записали некоторое натуральное число, не превосходящее 7. Сказочная шахматная фигура *кузнечик* стоит в одной из угловых клеток. Каждым своим ходом кузнечик может прыгнуть в клетку, стоящую в той же горизонтали или вертикали, что и кузнечик, и отстоящую от кузнечика на столько клеток, какое число записано в клетке с кузнечиком (в частности, если в клетке с кузнечиком записано число 1, он может переместиться на одну из соседних с ним по горизонтали или по вертикали клеток). Известно, что за 63 прыжка кузнечик может посетить все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз. Какое наибольшее количество троек могло быть написано в клетках доски? (15 баллов)

Решение: Разобьём клетки доски на группы, как показано на рисунке 1 (разными цифрами обозначены разные группы). Заметим, что если в какой-либо группе клеток все написанные числа равны трём, то кузнечик, прыгая по клеткам этой группы, никогда не сможет попасть в клетки другой группы. Так как кузнечик может обойти все клетки доски, он смог переместиться между клетками разных групп хотя бы 8 раз. Значит троек могло быть не более 56.

1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3

Рис. 1

F_7	E_3	D_4	F_6	E_4	D_3	F_1	E_9
A_7	B_7	C_3	A_8	B_6	C_4	A_9	B_1
G_2	H_5	I_2	G_3	H_4	I_3	G_4	H_3
F_8	E_2	D_5	F_5	E_5	D_2	F_2	E_8
A_6	B_8	C_2	A_5	B_5	C_5	A_4	B_2
G_1	H_6	I_1	G_6	H_1	I_4	G_5	H_2
F_9	E_1	D_6	F_4	E_6	D_1	F_3	E_7
A_1	B_9	C_1	A_2	B_4	C_6	A_3	B_3

Рис. 2

Приведём пример заполнения клеток таблицы и порядка обхода этих клеток кузнечиком (см. рисунок 2). В клетках $A_9, B_9, C_6, D_6, E_9, F_9, G_6, H_6$ стоят единицы, во всех остальных – тройки. Порядок обхода $A - B - C - D - E - F - G - H - I$ по возрастанию индексов.

Ответ: 56

5. Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$ и $b^2(b-a) = (c^2 - a^2)(b+a)$. Докажите, что $c^2(c-b) = (a^2 - b^2)(c+b)$. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим равенство $a^2(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$. Заметим, что если $b = c$, то $a = c$ и равенство $c^2(c-b) = (a^2 - b^2)(c+b)$ выполняется, так как обе его части будут равны нулю. Поэтому в дальнейшем рассматриваем случай $b \neq c$.

Раскроем скобки в первом равенстве и преобразуем его к виду $a^3 + c^2a - b^2a = a^2c + b^2c - c^3$ или $a(a^2 + c^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2)$. Аналогично, преобразуем равенство $b^2(b-a) = (c^2 - a^2)(b+a)$ к виду $b(b^2 + a^2 - c^2) = a(b^2 + c^2 - a^2)$.

Перемножим два полученных равенства и получим $ab(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + a^2 - c^2) = ac(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$. $(*)$

Если $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то равенство $a^2(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$ равносильно $(c^2 - b^2)(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$. Поскольку $b \neq c$, то значит $c - a = a + c$, откуда $c = 0$ и условие задачи не выполняется. Поэтому $a^2 + b^2 - c^2 \neq 0$ и можно сократить обе части равенства $(*)$ на $a(a^2 + b^2 - c^2)$. В итоге получаем $b(a^2 + c^2 - b^2) = c(b^2 + c^2 - a^2)$, что равносильно $ba^2 + bc^2 - b^3 = cb^2 + c^3 - ca^2$.

Последнее равенство преобразуем к виду $c^3 - c^2b = a^2c + a^2b - b^2c - b^3$, которое при разложении на множители примет вид $c^2(c-b) = (a^2-b^2)(c+b)$. Необходимое равенство получено.

6. Максим и Даша играют в игру. Изначально на доске написано в ряд 9 звёздочек. Каждый своим ходом, начиная с Даши, заменяет любую звёздочку на ненулевую цифру, причём использовать уже написанную цифру запрещено. После того, как все цифры будут использованы, к полученному числу приписывается это же число, записанное в обратном порядке, а затем получившееся 18-значное число делят на 11. Если в результате проделанных действий получилось число-палиндром (то есть число, читающееся слева направо и справа налево одинаково), то выиграла Даша, иначе – Максим. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника? (20 баллов)

Решение: Пусть в результате игры Максим и Даша составили число $A = \overline{a_1a_2 \dots a_9a_9 \dots a_2a_1}$. Пусть Даша выиграла, тогда изучим вид числа A, при котором это могло произойти. Так как $A > 12 \cdot 10^{16}$, то после деления на 11 получится 17-значное число-палиндром, обозначим его через $B = \overline{b_1b_2 \dots b_8b_9b_8 \dots b_2b_1}$. Тогда $A = 11B$, что можно записать «в столбик».

$$\begin{array}{r} b_1b_2b_3 \dots b_3b_2b_1 \\ b_1b_2b_3 \dots b_3b_2b_1 0 \\ \hline a_1a_2a_3 \dots \dots a_3a_2a_1 \end{array}$$

Докажем, что ни в одном столбце указанного сложения нет перехода разряда. Пусть такой переход есть, тогда возьмём самый правый столбец с наличием перехода. Пусть его номер равен j, то есть $b_j + b_{j-1} \geq 10$ (при этом полагаем $b_j = b_{18-j}$ и $b_0 = 0$), тогда в столбце с номером $19 - j$ также есть переход разряда, поскольку там стоят цифры b_{19-j} и b_{18-j}, равные по обозначению b_{j-1} и b_j. Поскольку изначально взятый нами столбец был правее всех других столбцов с переходом разряда, то $j \geq 10$. Также $j \leq 17$, так как в последнем разряда перехода быть не может. Тогда сумма цифр в столбце $18 - j$ равна $b_{18-j} + b_{17-j} + 1 = b_j + b_{j+1} + 1$, а сумма цифр в столбце $j + 1$ равна $b_j + b_{j+1}$, поскольку в неё нет перехода единицы из следующего разряда. Обе эти суммы должны оканчиваться на цифру a_j (при этом полагаем $a_j = a_{19-j}$), значит их разность оканчивается на ноль, чего быть не может, так как их разность равна единице.

Из доказанного утверждения следует, что все суммы в столбцах являются цифрами, а значит $a_1 = b_1 \leq a_2 = b_1 + b_2$, $a_1 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \leq a_2 + a_4 = b_1 +$

$b_2 + b_3 + b_4$, и так далее. То есть сумма первых k цифр числа A на нечётных позициях не больше суммы первых k цифр числа A на чётных позициях – только в случае выполнения этих свойств Даша может выиграть.

Приведём стратегию Максима, при которой Даша не сможет добиться числа, с указанными выше свойствами. Чтобы Даше не проиграть своим первым ходом, ей нужно поставить цифру 1 в первый разряд или цифру 9 во второй разряд. В противном случае Максим своим ходом сможет поставить наименьшую из имеющихся цифр во второй разряд или наибольшую из имеющихся цифр в первый разряд, чтобы условие $a_1 \leq a_2$ нарушилось. Поставив одну из указанных цифр, Максим ставит вторую цифру так, чтобы добиться ситуации $A = \overline{19\ldots}$. В итоге, опираясь на введённые выше обозначения, получим $b_1 = 1, b_2 = 8$. Поскольку $a_3 = b_2 + b_3 = 8 + b_3 \leq 9$ и цифру 9 уже нельзя ставить, то $a_3 = 8, b_3 = 0$. Значит, Даша своим вторым ходом обязана ставить цифру восемь на третье место, чтобы не проиграть. После этого Максим своим вторым ходом добивается ситуации $A = \overline{198a_4 2\ldots}$. В итоге $a_4 = b_3 + b_4 = b_4 \leq a_5 = b_4 + b_5$, то есть для победы Даша обязана поставить вместо a_4 цифру, не большую двух. Но таких цифр у неё в распоряжении больше нет, следовательно, она не может выиграть. Значит, выигрышная стратегия есть у Максима, и при любых действиях Даши он гарантирует себе победу.

Математика 10-11 класс

1. Приведите пример различных натуральных чисел $a < b < c < d$ таких, что $c^2 = ab + ad + bd$. (15 баллов)

   Решение: Например, подходят числа $a = 1, b = 4, c = 8, d = 12$.

2. Графики двух квадратичных функций, вершины которых имеют абсциссы x_1, x_2 и лежат на оси абсцисс, пересекаются в точках с абсциссами x_3, x_4. На первом графике выбрали точку M, с абсциссой x_2, а на втором – точку N, с абсциссой x_1. Найдите абсциссу точки пересечения прямой MN с осью абсцисс. (15 баллов)

   Решение: Поскольку вершины графиков квадратичных функций лежат на оси абсцисс, то эти функции имеют вид $a(x - x_1)^2$ и $b(x - x_2)^2$, причём $a \neq 0, b \neq 0$. Точки пересечения этих графиков найдём из уравнения $a(x - x_1)^2 = b(x - x_2)^2$, которое после преобразований примет вид $(a - b)x^2 + (2bx_2 - 2ax_1)x + ax_1^2 - bx_2^2 = 0$. По теореме Виета, корни уравнения x_3, x_4 удовлетворяют равенству $x_3 + x_4 = \frac{2bx_2 - 2ax_1}{b - a}$.

   Из условия следует, что координаты точек M и N равны $(x_2; a(x_2 - x_1)^2)$ и $(x_1; b(x_1 - x_2)^2)$ соответственно. Уравнение прямой MN имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - b(x_1 - x_2)^2}{a(x_2 - x_1)^2 - b(x_1 - x_2)^2}$. Обозначим абсциссу точки пересечения прямой MN с осью абсцисс через x_0. При этом ордината этой точки равна нулю, то есть справедливо равенство $\frac{z_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-b(x_1 - x_2)^2}{a(x_2 - x_1)^2 - b(x_1 - x_2)^2}$, и поскольку $x_1 \neq x_2$ (иначе бы графики пересекались в одной точке или совпадали), то последнее равенство равносильно равенству $\frac{z_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-b}{a - b}$, откуда $x_0 = \frac{b(x_2 - x_1) + (b - a)x_1}{b - a} = \frac{bx_2 - ax_1}{b - a} = \frac{x_3 + x_4}{2}$.

   Ответ: $\boldsymbol{\frac{x_3 + x_4}{2}}$**.**

3. Пусть A – количество способов представить число 2018 в виде суммы факториалов натуральных чисел, а B – количество способов представить число 2019 в виде суммы факториалов натуральных чисел (наборы, отличающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Докажите, что $A = B$. (15 баллов)

   Решение: Пусть $a_1! + a_2! + a_3! + \ldots + a_n! = 2019$ – некоторое представление числа 2019 в виде суммы факториалов натуральных чисел. Поскольку эта сумма нечётна, есть хотя бы одно нечётное слагаемое. Нечётный факториал единственный и равен единице, поэтому, без ограничения общности, $a_1 = 1$. Тогда равенство примет вид $a_2! + a_3! + \ldots + a_n! = 2018$ и является представлением числа 2018 в виде суммы факториалов натуральных чисел. То есть из каждого представления числа 2019 мы однозначно получили представление числа 2018. С другой стороны, взяв любое представление $b_2! + b_3! + \ldots + b_k! = 2018$ и добавив к нему $b_1! = 1$, получим однозначно представление $b_1! + b_2! + b_3! + \ldots + b_k! = 2019$. Значит, количества представлений чисел 2018 и 2019 совпадают.

4. Про простые числа p и q известно, что $p + p^2 + \ldots p^q = q + q^2 + \ldots q^p$. Докажите, что $p = q$. (15 баллов)

   Решение: Для решения данной задачи нам потребуется следующий известный факт:

   Малая теорема Ферма. *Для простого* p *и натурального* a*, не кратного* p*, выполнено* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

   Предположим, что $p \neq q$ и без ограничения общности будем считать, что $p > q$. Добавим к обеим частям равенства 1, после чего умножим обе части на $(p-1)(q-1)$. Тогда по формуле разности степеней получим $(p^{q+1} - 1)(q-1) = (q^{p+1} - 1)(p-1)$. Раскрыв скобки, получаем $p^{q+1}q - p^{q+1} - q = q^{p+1}p - q^{p+1} - p$, что, в свою очередь, равносильно равенству $p^{q+1}q - p^{q+1} - q^{p+1}p + p = q - q^{p+1}$. Поскольку левая часть равенства делится на p, то и выражение $q - q^{p+1} = q(1 - q^p)$ делится на p. Поскольку p и q являются простыми числами и $p > q$, то НОД$(p, q) = 1$, а значит $q^p - 1 \vdots p$. Но из малой теоремы Ферма следует, что $q^p - 1 \equiv p - 1 (mod\ p) \equiv -1 (mod\ p)$, поэтому $-1 \vdots p$, что невозможно. Следовательно, наше предположение ошибочно и $p = q$.

5. На доске размером 12×12 стоит сказочная шахматная фигура *принцесса*. За один ход принцесса может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали влево-вниз. Какое наибольшее число не бьющих друг друга принцесс можно поставить на доску? (20 баллов)

   Решение: Рассмотрим прямоугольник размером 6×2 (6 клеток по горизонтали и 2 клетки по вертикали) и докажем, что в нём может располагаться не более 4 принцесс. Разделим такой прямоугольник на квадраты размером 2×2. Заметим, что в каждом таком квадрате может располагаться не более 2 принцесс, причём если принцессы две, то они стоят только так, как показано на рисунке 3. Предположим, что в каком-то прямоугольнике 6×2 оказалось не менее 5 принцесс. Тогда в каких-то двух из его квадратов 2×2 оказалось по 2 принцессы. Эти квадраты не могут быть соседними, так как тогда одна из принцесс окажется под боем другой (см. рисунок 4). Если же эти квадраты не соседние, а крайние (см. рисунок 5), то в средний квадрат нельзя будет поставить ни одну принцессу, так как ей будет бить какая-то другая. Следовательно, в каждом таком прямоугольнике может располагаться не более 4 принцесс. Доска размером 12×12 разбивается на 12 таких прямоугольников, значит на всю доску можно поставить не более 48 принцесс. Пример приведён на рисунке 6.

П	
	П

Рис. 3

П		П	
	П		П

Рис. 4

П				П	
	П				П

Рис. 5

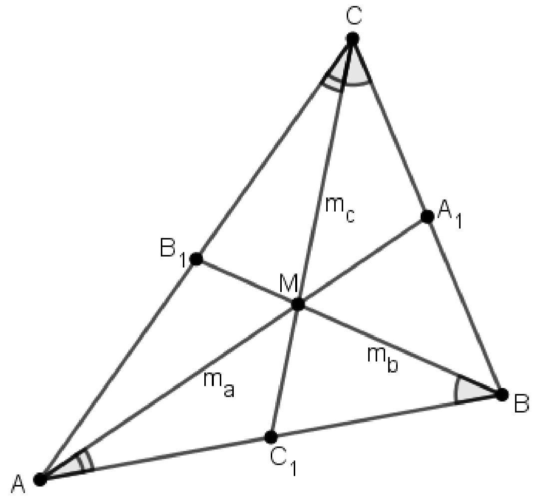
П			П			П			П		
	П			П			П			П	
		П			П			П			П
П			П			П			П		
	П			П			П			П	
		П			П			П			П
П			П			П			П		
	П			П			П			П	
		П			П			П			П
П			П			П			П		
	П			П			П			П	
		П			П			П			П

Рис. 6

Ответ: 48 принцесс.

6. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = \angle BCM, \angle BAM = \angle ACM$. Верно ли, что треугольник ABC – равносторонний? (20 баллов)

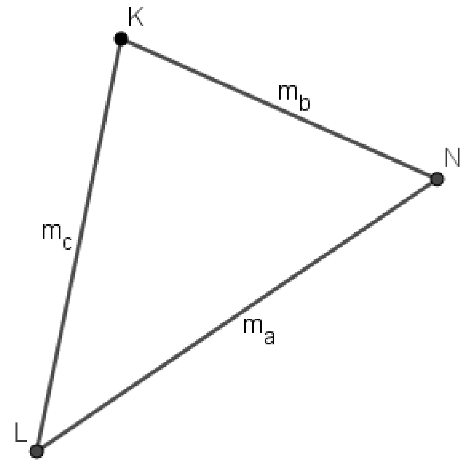
Решение: Пусть $BC = a, AC = b, AB = c$. Обозначим середины сторон BC, AC, AB через A_1, B_1, C_1 соответственно, а длины медиан AA_1, BB_1, CC_1 – через m_a, m_b, m_c соответственно. Заметим, что $\angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = \angle ACM + \angle CAM = \angle AMC_1$. Аналогично, $\angle ABC = \angle BMC_1$. Как известно, существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам треугольника ABC. Построим треугольник KLM такой, что $LN = m_a, KN = m_b, LK = m_c$. Углы этого треугольника будут равны углам между медианами AA_1, BB_1, CC_1, а именно $\angle KLN = \angle AMC_1 = \angle BAC$ и $\angle LKN = \angle BMC_1 = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и KLM подобны по двум углам, а значит $\frac{a}{m_b} = \frac{b}{m_a} = \frac{c}{m_c}$.



По формуле длины медианы треугольника получим

$$\frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}},$$

откуда $\frac{a^2}{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{b^2}{2\left(b^2+c^2\right)-a^2} = \frac{c^2}{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$.



Первое равенство равносильно $a^2(2(b^2 + c^2) - a^2) = b^2(2(a^2 + c^2) - b^2)$, откуда $2a^2c^2 - a^4 = 2b^2c^2 - b^4$, $2c^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$.

Предположив, что $a \neq b$, получим $2c^2 = a^2 + b^2$, откуда $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство

$\frac{a^2}{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{c^2}{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$ также выполняется, что проверяется прямой подстановкой. Таким образом, под условие задачи подойдёт любой треугольник, длины сторон которого связаны соотношением $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, например, треугольник со сторонами $a = 5, b = 7, c = \sqrt{37}$.

Ответ: Нет.

Замечание: Треугольники, длины сторон которых связаны соотношением $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, называются *автомедианными*.

Критерии оценки работ
Математика 8-9 класс

Задача 1

Полное решение	15 баллов
Присутствует разложение числа 360 в виде суммы натуральных степеней двойки	13 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Полное решение	15 баллов
Неверно доказан факт подобия треугольников AKC и HKB	-5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	15 баллов
Верно посчитано количество аккордов, содержащих ровно одну чёрную клавишу	6 баллов
Правильный ответ с указанием верного количества аккордов с одной, двумя и тремя чёрными клавишами	3 балла
Арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения	-1 балл
Не посчитаны случаи, когда все 3 клавиши чёрные	-3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	15 баллов
Доказано, что больше 56 троек не могло быть. Пример отсутствует	12 баллов
Верный пример, с указанием порядка обхода доски	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 6

Полное решение	20 баллов
Доказано, что для победы Даши необходимо выполнение неравенств $a_1 + a_2 < 10, a_2 + a_3 < 10, \dots, a_8 + a_9 < 10$, где $a_1, a_2, \dots, a_9$ – цифры числа, полученного после деления исходного числа на 11	8 баллов
Сформулировано, но не доказано, что для победы Даши необходимо выполнение неравенств $a_1 + a_2 < 10, a_2 + a_3 < 10, \dots, a_8 + a_9 < 10$, где $a_1, a_2, \dots, a_9$ – цифры числа, полученного после деления исходного числа на 11	3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Математика 10-11 класс

Задача 1

Верный пример	15 баллов
Найден набор 2, 3, c, 28, но допущена арифметическая ошибка при нахождении c	13 баллов
Неверный пример	0 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Полное решение	15 баллов
Арифметическая ошибка, приведшая к одному из ответов $2(x_3 + x_4), -\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{a_1(x_1-x_2)}{a_2-a_1}, x_2 + \frac{2x_2-x_3-x_4}{2x_2-2x_1}, \frac{x_3+x_4}{2(x_2-x_1)}$	13 баллов
Абсцисса искомой точки выражена через x_1, x_2, x_3, x_4 и старшие коэффициенты	5 баллов

квадратичных функций	
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	15 баллов
Сформулирована, но не доведена до конца, идея сравнения чисел A и B, в которой явно выписан один из способов представления чисел 2018 и 2019, а остальные способы получаются с помощью одних и тех же преобразований	5 баллов
Доказано, что в каждом представлении 2019 в виде суммы факториалов натуральных чисел есть слагаемое 1!	5 баллов
Замечено, но не доказано, что в каждом представлении 2019 в виде суммы факториалов натуральных чисел есть слагаемое 1!	3 балла
Замечено, что любое представление числа 2018 в виде суммы факториалов натуральных чисел при добавлении 1! Превращается в представление числа 2019	3 балла
Отсутствие доказательства того, что в каждом представлении 2019 в виде суммы факториалов натуральных чисел есть слагаемое 1!	-3 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	15 баллов
Доказано, что равенство выполняется лишь в случае $p(1+q+\ldots+q^p) \vdots (1+p+\ldots+p^q)$, причём случай $(1+q+\ldots+q^p) \vdots (1+p+\ldots+p^q)$ разобран верно	12 баллов
Доказано, что равенство выполняется только при $p(p-1) \vdots q$	10 баллов
Доказано, что равенство выполняется только при $(q^p-1) \vdots p$	5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Верный пример расстановки 48 принцесс	5 баллов
Замечено, что если в квадрате 3×3 поставлено 4 принцессы, то в соседнем квадрате можно поставить не более 2 принцесс	3 балла
Сформулировано, но не доказано, что в прямоугольник 2×3 можно поставить не более 2 принцесс	-2 балла
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 6

Полное решение	20 баллов
Доказано, что если $BC^2 + AC^2 = 2AB^2$, то $\angle ABM = \angle BCM$ и $\angle BAM = \angle ACM$	15 баллов
Отсутствие решения	0 баллов