

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

**Задание 1.** (15 баллов) Существуют ли 4 различных натуральных числа, больших единицы, такие, что сумма квадратов любых трёх из них делится на оставшееся число, увеличенное на единицу? (15 баллов)

**Задание 2.** (15 баллов) На доске написано 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Максим нашёл все попарные произведения этих чисел и выписал их на доску, после чего стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Затем он нашёл все попарные произведения оставшихся чисел и выписал их на доску, после чего снова стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Сколько теперь чисел написано на доске?

**Задание 3.** (15 баллов) В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , все рёбра которого равны единице, точка  $M$  – середина ребра  $CC_1$ , точка  $O$  – центр грани  $ABB_1 A_1$ . Множество точек, лежащих на грани  $CB B_1 C_1$ , таково, что для любой точки  $X$  этого множества плоскость  $XOM$  пересекает ребро  $AD$ . Найдите площадь этого множества.

**Задание 4.** (15 баллов) Геометрическая прогрессия  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , в которой все члены различны, такова, что числа  $a_1, a_2^2, a_3^3, \dots, a_n^n$  в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Какое наибольшее значение может принимать  $n$ ?

**Задание 5.** (20 баллов) В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины высот  $AA_1$  и  $BB_1$ . Оказалось, что центр  $I$  вписанной в треугольник  $HMN$  окружности лежит на биссектрисе угла  $MCN$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

**Задание 6.** (20 баллов) Имеется квадрат  $6 \times 6$ . Два игрока по очереди покрывают его полосками. Первый игрок каждым своим ходом кладёт полоску  $1 \times 4$  на свободные клетки, а второй игрок каждым своим ходом кладёт полоску  $1 \times 2$  на свободные клетки. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество полосок может гарантированно выложить первый игрок?