

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (15 баллов) Велосипедист выехал из города A в город B , расстояние между которыми равно 100 км. Оказалось, что для любого t его средняя скорость v_t в первые t часов пути может быть вычислена по формуле $v_t = S + t$, где S – путь в километрах, который осталось проехать велосипедисту. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Задание 2. (15 баллов) Различные числа a, b, c таковы, что $(a - 1)(a - b + c) = (b - 1)(b - a + c)$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $a + b + c$.

Задание 3. (15 баллов) Саша загадал 4 различных положительных числа и в каждой паре чисел нашёл отношение суммы чисел к их произведению. Пять из шести полученных результатов оказались следующими: $\frac{1}{20}, \frac{2}{15}, \frac{1}{6}, \frac{41}{120}, \frac{9}{24}$. Найдите все значения, которые может принимать шестой результат.

Задание 4. (15 баллов) У Даши есть 3 одинаковые настоящие монеты, но Катя подложила ей одну фальшивую монету, легче настоящей. Для определения фальшивой монеты Катя любезно предложила Даше воспользоваться её чашечными весами без гирь, но при этом разрешила ей только выбирать, какие монеты на какую чашу класть, а результаты взвешиваний будет называть сама Катя. После любого взвешивания она может сказать, какая из чаш перевесила или что весы в равновесии. Чтобы Даше было сложнее найти фальшивую монету, Катя по очереди говорит ей правильный и неправильный результат взвешиваний, при этом неизвестно, что она скажет при первом взвешивании – правду или ложь. Сможет ли Даша за несколько взвешиваний определить фальшивую монету?

Задание 5. (20 баллов) В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и B взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M . На стороне AB отмечены точки P и Q так, что $AP = PQ = QB$. Доказать, что периметр треугольника CPQ меньше удвоенного периметра треугольника ABM .

Задание 6. (20 баллов) На бумажной ленте написано некоторое число, не содержащее нулей. Миша может разрезать ленту между любыми двумя цифрами и получить два новых числа. Оказалось, что как бы Миша ни разрезал ленту, сумма полученных чисел всегда будет равна некоторой натуральной степени семёрки. Из какого наибольшего количества цифр может состоять число, записанное на ленте?