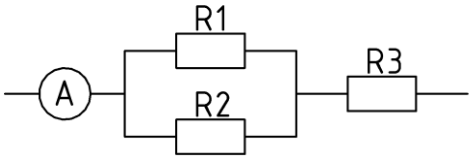
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (12 баллов) **Нагретые резисторы**

На схеме показаны проволочные резисторы из различных материалов: 1 и 2 из меди, 3 из никеля. Сопротивления резисторов при температуре 20 °C соответственно равны 200 Ом, 300 Ом и 250 Ом. Определить температуру, которая установится у третьего резистора, а также общее сопротивление участка сети на схеме при показаниях амперметра 20 А. Теплопотери резисторов прямо пропорциональны разности температуры резистора и окружающего воздуха. Для всех резисторов этот коэффициент пропорциональности (коэффициент теплоотдачи) равен 50 Вт/°C. Температуру окружающего воздуха можно считать постоянной и равной 20 °C. Температурные коэффициенты сопротивления меди и никеля соответственно равны 0,0043 °C^{-1} и 0,006 °C^{-1}.



Решение:

Покажем зависимость сопротивления резистора от перепада температур между резистором и окружающим воздухом:

$$R = R_0(1 + \beta \cdot \Delta t)$$

где β - температурный коэффициент сопротивления материала резистора;
Δt – перепад температур между резистором и окружающим воздухом;
R_0 – сопротивление резистора при нулевом перепаде температур.

Запишем уравнение теплового баланса для третьего резистора:

$$I_3^2 R_3 = \alpha \cdot \Delta t_3$$

где α – коэффициент пропорциональности (теплоотдачи).

Откуда получим:

$$\Delta t_3 = \frac{I_3^2 R_{03}}{\beta_{Ni} \cdot I_3^2 R_{03} - \alpha} = \frac{20^2 \cdot 250}{0.006 \cdot 20^2 \cdot 250 - 50} = 182 \text{ °C}$$

Тогда температура третьего резистора:

$$\Delta t_3 = \Delta t_3 + \Delta t_3 = 182 + 20 = 202 \text{ °C}$$

Для первых двух резисторов запишем уравнения зависимости сопротивления от перепада температур, а также уравнения для токов при параллельном сопротивлении резисторов:

$$I_1^2 R_1 = \alpha \cdot \Delta t_1$$
$$I_2^2 R_2 = \alpha \cdot \Delta t_2$$
$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$
$$I_1 + I_2 = I$$

Из данной системы уравнений можно получить соотношение:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

Данная пропорциональность токов и перепадав температур, которая связана с тем, что резисторы из одного материала, говорит о том, что два параллельных резистора можно рассматривать, как один эквивалентный с сопротивлением:

$$R_{0,1-2} = \frac{R_{01} R_{02}}{R_{01} + R_{02}} = 120 \text{ Ом}$$

Аналогично определим перепад температур с окружающим воздухом для эквивалентного резистора:

$$\Delta t_{1-2} = \frac{20^2 \cdot 120}{0.0043 \cdot 20^2 \cdot 120 - 50} = 307\ ^\circ\mathrm{C}$$

Тогда общее сопротивление участка сети при указанном токе равно:

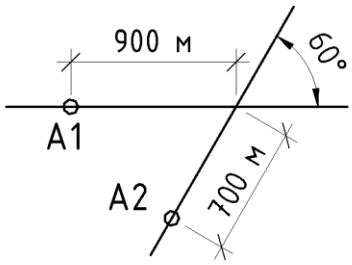
$$R_{\text{общ}} = R_{0,1-2}(1 + \beta_{Cu}\Delta t_{1-2}) + R_{0,3}(1 + \beta_{Ni}\Delta t_3) =$$
$$= 120 \cdot (1 + 0.0043 \cdot 307) + 250 \cdot (1 + 0.006 \cdot 202) = 831\ \text{Ом}$$

Ответ: 202 °C, ***831 Ом***

Критерии	Баллы
Записано уравнение теплового баланса	2
Найдена температура третьего резистора	4
Определено общее сопротивление участка сети	6

Задание 2. (12 баллов) **Перекрёсток**

Два автомобиля (А1 и А2) подъезжают к перекрёстку дорог по углом 60°. В некоторый момент времени автомобили находились на расстоянии от перекрёстка, показанном на рисунке. Скорости автомобилей постоянны и равны 36 км/ч и 90 км/ч соответственно. Какое кратчайшее расстояние будет между автомобилями и через какое время они на этом расстоянии окажутся?



Решение:

Рассмотрим относительное движение автомобилей (второго относительно неподвижного первого).

$$\overrightarrow{V_{\text{отн}}} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$$

Определим проекции относительно скорости в горизонтальном и вертикальном направлениях:

$$V_{\text{гор}} = V_2 \cos 60^\circ - V_1 = 2{,}5\ \text{м/с}$$
$$V_{\text{вер}} = V_2 \sin 60^\circ = 21{,}65\ \text{м/с}$$

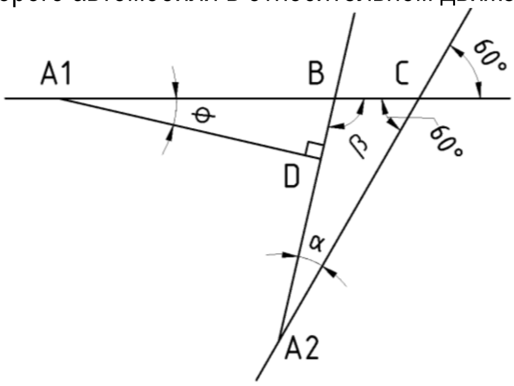
Модуль относительной скорости равен:

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{2{,}5^2 + 21{,}65^2} = 21{,}8\ \text{м/с}$$

Отклонение вектора относительной скорости от горизонтального направления равно:

$$arctg(21.65/2.5) = 83.4^\circ$$

Покажем направление движения второго автомобиля в относительном движении (A_2B):



Кратчайшим расстоянием между автомобилями будет длина перпендикуляра, проведённого от первого автомобиля до траектории относительного движения второго автомобиля (A1D). Зная отклонение вектора относительной скорости от горизонтального направления, легко найдём указанные на рисунке углы:

$$\alpha = 23.4^o, \beta = 96.6^o, \varphi = 6.6^o$$

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника A_2BC:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{A_2C}{\sin\beta} = \frac{A_2B}{\sin 60^o}$$

Откуда найдём BC = 280 м и A_2B = 610 м. Тогда длина $A_1B = A_1C$ – BC = 900 – 280 = 620 м. А значит длина искомого перпендикуляра (кратчайшее расстояние между автомобилями) равна:

$$A_1D = A_1B\cos\varphi = 616 \text{ м}$$

Расстояние, которое пройдёт второй автомобиль в относительном движении до этого момента, равно:

$$A_2D = A_2B - A_1D \cdot tg(\varphi) = 539 \text{ м}$$

Это расстояние в относительном движении второй автомобиль пройдёт за время:

$$t = \frac{A_2D}{V_{\text{отн}}} = \frac{539}{21.8} = 24.7\ c$$

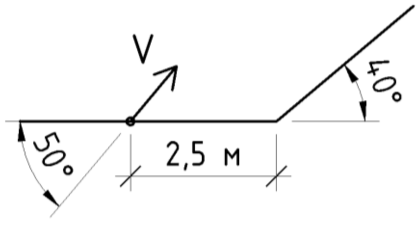
Решение задачи минимизацией длины искомого перпендикуляра, полученного по теореме косинусов, также является полноценным решением задачи. Незначительные отличии в ответе из-за промежуточного округления не являются ошибками.

Ответ: 616 м, 24,7 с.

Критерии	Баллы
Выполнен переход к относительному движения автомобиля	2
Найдено кратчайшее расстояние между автомобилями	6
Найдено искомое время	4

Задание 3. (12 баллов) **Полив склона**

Поливочный шланг находится у поверхности земли и направлен под углом 50° к горизонту в сторону прямого склона с углом 40° как показано на рисунке. Скорость воды на выходе из шланга равна V = 8 м/с. Внутренний диаметр шланга 25 мм. Какая масса воды одновременно находится в полёте? Брызгами воды при ударе об склон можно пренебречь.



Решение:

Определим проекции скорости капли в момент выхода из шланга на горизонтальное и вертикальное направление:

$$V_{\text{гор}} = V\cos 50^o = 5.14 \text{ м/с}$$
$$V_{\text{вер}} = V\sin 50^o = 6{,}13 \text{ м/с}$$

Обозначим расстояние от шланга до склона как S, а расстояние от низа склона до места удала струи воды об склон как l. Запишем уравнения движения капли воды, вылетающей из шланга, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$S + l \cdot \cos 40^o = V_{гор} \cdot t$$

$$l \cdot \sin 40^o = V_{вер} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

где t – время полёта капли.

Полученная система уравнений содержит две неизвестные (l и t). Её можно свести к квадратному уравнению относительно t. Решением квадратного уравнения будут два корня, один из которых отрицательный, а второй равен 0,85 с. Математические выкладки для решения системы уравнений не приводятся.

Чтобы определить массу воды в полёте не обязательно знать длину траектории струи. Достаточно рассмотреть массу воды, которая выходит из шланга за время полёта одной капли:

$$m = \rho \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot V \cdot t = 1000 \cdot \frac{3.14 \cdot 0.025^2}{4} \cdot 8 \cdot 0.85 = 3.3 \text{ кг}$$

Ответ: 3,3 кг.

Критерии	Баллы
Найдено время полёта одной капли	8
Найдена масса воды в полёте	4

Задание 4. (14 баллов) **Изотерма в замкнутом цикле**

Идеальный одноатомный газ совершает замкнутый цикл, который состоит из двух изобар и двух адиабат. Известно, что точки 1 и 3 имеют одинаковую температуру. Температуры точек 2 и 4 соответственно равны 420 К и 290 К. Найти температуру, соответствующую изотерме 1-3, если КПД цикла равен 25%.

Решение:

Газ получает теплоту при изобарном расширении:

$Q_{12} = 3\nu R(T_2-T_1)/2 + p(V_2-V_1)$

Учитывая уравнения состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона), получим:

$Q_{12} = 5\nu R(T_2-T_1)/2$

Аналогично найдём теплоту, отданную при процессе изобарного сжатия:

$Q_{34} = 5\nu R(T_3-T_4)/2$

Коэффициент полезного действия можно представить как:

$\eta = 1 - Q_{34} / Q_{12}$

Подставляя сюда выражения для Q_{34} и Q_{12}, и учитывая, что $T=T_3=T_1$, получим:

$T = (T_2 (1- \eta)+T_4)/(2- \eta) = 346$ К

Ответ: 346 К

Критерии	Баллы
Найдено численное значение искомой температуры	14

Задание 5. (14 баллов) **Рамка в магнитном поле**

Круглую проволочную рамку с радиусом 15 см разделили на две одинаковые половин, а затем спаяли их таким образом, что плоскости этих половин составили между собой угол 90°. Затем полученную рамку поместили в однородное магнитное поле с индукцией 2,5 Тл так, что общий диаметр половин рамки оказался перпендикулярен линиям индукции магнитного поля. После чего рамку начали вращать вокруг общего диаметра половин с угловой скоростью 5 рад/с. Определите максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке при данном вращении.

Решение:

Пусть для одной половинки рамки в момент времени t = 0 значение магнитного потока через нее равно:

$$\Phi_{10} = BS = B\frac{\pi R^2}{2}$$

Тогда уравнение магнитного потока при вращении этой половинки рамы моно записать в виде:

$$\Phi_1(t) = B\frac{\pi R^2}{2}\cos\omega t$$

В этой половинке рамке возникает ЭДС индукции равный:

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot\sin\omega t$$

Аналогично для второй половинки рамки с учётом сдвига по фазе в 90°:

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot\cos\omega t$$

Результирующая ЭДС индукции в рамке:

$$\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot\sin\omega t - B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot\cos\omega t = B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot(\sin\omega t - \cos\omega t)$$

Поскольку:

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ то } \varepsilon_\Sigma = \sqrt{2}B\frac{\pi R^2}{2}\omega\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varepsilon_{\Sigma\text{макс}} = \sqrt{2}B\frac{\pi R^2}{2}\omega$$

Подставив численное значение величин, получим значение ЭДС равное 0,62 В.

Ответ: 0,62 В

Критерии	Баллы
Записано выражение для ЭДС индукции одной половинки рамки	5
Записано выражение для суммарного ЭДС индукции	5
Найдено максимальное значение ЭДС индукции в рамке	4

Задание 6. (12 баллов) **Качели**

Мальчик захотел покататься на качелях и попросил папу раскачать его. Раскачивая его, папа каждый раз быстро толкал качели, когда мальчик был в низшей точке своей траектории, сообщая им импульс 3 кг·м/с в направлении скорости движения мальчика. Качели подвешены на лёгких стержнях длиной 2,5 м, а масса мальчика на качелях 20 кг. На какой максимальный угол отклонятся качели после 20 толчков? Изначально качели покоились. Силой сопротивления воздуха и трением в креплении качели пренебречь.

Решение:

Так как стержни качелей лёгкие, то можно считать, что вся масса сосредоточена внизу – то есть рассматривать качели с мальчиком, как математический маятник. Если при прохождении положения равновесия (нижней точки) качели с мальчиком имели кинетическую энергию $E_{кин}$, то по закону сохранения механической энергии они поднимутся на высоту h: $E_{кин} = mgh$. Если максимальный угол отклонения от вертикали равен α, то $h = L(1 - \cos\alpha)$. Отсюда получаем: $E_{кин} = mg L(1 - \cos\alpha)$.

При каждом толчке импульс качелей увеличивается на p_0, за N толчков они приобретут импульс $p = Np_0$, и кинетическую энергию $E_{кин} = (Np_0)^2/2m$. Таким образом, получим:

$$\frac{(Np_0)^2}{2m} = mgL(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(Np_0)^2}{2m^2Lg} = 1 - \frac{(20\cdot 3)^2}{2\cdot 20^2\cdot 2{,}5\cdot 10} = 1 - \frac{9}{50} = 0{,}82 \text{, и } \alpha \approx 35°$$

Ответ: 35°

Критерии	Баллы
Верно найдено численное значение искомого угла	12

Задание 7. (10 баллов) **Лёд в печи**

Кубик льда с температурой -20 °С начали нагревать в лабораторной печи в течение длительного времени при постоянной мощности. Лёд полностью растаял через 45 мин. Через какое время от начала эксперимента лёд начал таять? Через какое время бы растаял этот кубик льда, если мощность печи бы увеличивали на 20% каждые 5 минут? Удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}3\cdot10^5$ Дж/К.

Решение:

Поскольку масса кубика льда неизвестна вычисления будем вести, выражая ответ в долях от массы кубика льда, подставляя известные значения в СИ.

Определим количество теплоты, необходимое, чтобы полностью растопить кубик льда:

$$Q_л = c_л \cdot m \cdot (t_{плав} - t_0) + \lambda \cdot m = 2100 \cdot m \cdot (0 + 20) + 330000 \cdot m = 372000 \cdot m$$

Определим мощность лабораторной печи:

$$q_п = {}^{Q_л}/_{\tau} = 372000 \cdot m : (45 \cdot 60) = 137{,}8 \cdot m$$

Определим количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть лёд до температуры плавления:

$$Q_{плав} = c_л \cdot m \cdot (t_{плав} - t_0) = 2100 \cdot m \cdot (0 + 20) = 42000 \cdot m$$

Определим количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть лёд до температуры плавления:

$$\tau_1 = {}^{Q_{плав}}/_{q_п} = (42000 \cdot m) : (137{,}8 \cdot m) = 305 \text{ с } \approx 5 \text{ мин}$$

Для решения второй части задачи воспользуемся методом последовательного перебора, поскольку изменение мощности печи носит дискретный характер. Промежуточный в задаче не представлен, но легко получить, используя значения из первой части задачи, что лёд растает между 25 мин и 30 мин нагрева. Чтобы получить точное значение времени, определим количество теплоты, недополученное кубиком льда до полного таяния на 25 минуте:

$$Q_{ост} = 372000 \cdot m - 137{,}8 \cdot m \cdot (1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + 1{,}2^4) = 64409 \cdot m$$

Исходя из этого на плавление после 25 мин уйдёт время:

$$\tau_{ост} = {}^{Q_{ост}}\Big/_{(q_п \cdot 1{,}2^5)} = 188 \text{ с} \approx 3 \text{ мин}$$

Тогда общее затраченное время на полное плавление:

$$\tau_2 = 25 + 3 = 28 \text{ мин}$$

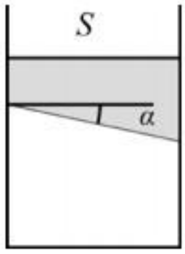
Решение второй части задачи с использование формул для геометрической прогрессии также считается верным. Незначительные отличии в ответе из-за промежуточного округления не являются ошибками.

Ответ: 5 мин, 28 мин

Критерии	Баллы
Определено время до начала плавления	4
Определено время до полного плавления при увеличении мощности печи	6

Задание 8. (10 баллов) **Косой поршень**

Пустой сосуд с поперечным сечением 20 см^2 накрыли косым поршнем массой 5 кг. Нижняя плоскость поршня составляет угол 30^o с горизонтом. На поршень медленно начали насыпать песок массой 20 кг. Во сколько раз изменится объём воздуха под поршнем после того, как весь песок высыпали? Атмосферное давление принять равным 10^5 Па.



Решение:

Пусть давление газа под поршнем p. Тогда проекция на вертикальную ось силы, действующей со стороны газа на поршень, равна

$$F_{\perp} = p\frac{S}{\cos\alpha}\cos\alpha = pS$$

то есть она зависит лишь от площади поперечного сечения сосуда. Запишем условие равновесия поршня в исходном состоянии и после насыпания песка:

$$\begin{cases} p_1 S = Mg + p_0 S \\ p_2 S = mg + Mg + p_0 S \end{cases}$$

где *p1 p2* – давление газа под поршнем до и после насыпания песка на поршень соответственно.
m и M – масса песка и масса поршня

Считая газ под поршнем идеальным, а процесс, в силу медленности насыпания песка, изотермическим, запишем уравнение Бойля-Мариотта для газа под поршнем:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{mg + Mg + p_0 S}{Mg + p_0 S}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{20 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 100000 \cdot 0.002}{5 \cdot 10 + 100000 \cdot 0.002} = 1.8$$

Ответ: 1.8

Критерии	Баллы
Найдено численное значение V1/V2	10
Найдена обратная величина численного значения V1/V2	4*

* - одновременное выполнение обоих критериев невозможно