

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (10 баллов) **Светофор и автомобиль**

Автомобиль начинает движение без начальной скорости и с постоянным ускорением 1 м/с². Когда автомобиль проехал мимо светофора, его скорость была равна 36 км/ч. На каком расстоянии от светофора он находился 2 с назад?

Решение:

Автомобиль движется равноускорено без начальной скорости и до светофора проходит путь $S_2 = at^2/2$. Две секунды назад он прошел путь $S_1 = a(t - \tau)^2/2$.

Следовательно: $l = S_2 - S_1$

Получили три уравнения и четыре неизвестных. Время t можно выразить из закона скорости равноускоренного движения $v = a \cdot t$. Решая систему четырех уравнений, получаем выражение расстояния l через данные задачи:

$$l = S_2 - S_1 = \frac{a}{2} [t^2 - (t - \tau)^2] = \frac{a}{2} \left[\left(\frac{v}{a}\right)^2 - \left(\frac{v}{a} - \tau\right)^2 + \frac{2v\tau}{a} - \tau^2 \right] = \frac{a\tau}{2} \left(\frac{2v}{a} - \tau\right)$$

Подставим числовые значения и получим:

$$l = \frac{1 \cdot 2}{2} \left(\frac{2 \cdot 10}{1} - 2\right) = 18 \text{ м.}$$

Ответ: 18 м.

Критерии	Баллы
Составлена система уравнений для движения автомобиля	5
Получено выражение для искомого расстояния	3
Верно получен численный ответ	2

Задание 2. (12 баллов) **Вода и керосин**

В цилиндрический сосуд налили равные массы керосина и воды. Общая высота жидкостей в сосуде составила 36 см. Найти давление жидкостей на дно сосуда и на границе раздела воды и керосина, если плотность воды 1 г/см³, а плотность керосина 0,8 г/см³.

Решение:

Давление жидкости, состоящей из нескольких несмешивающихся компонентов (вода-керосин в нашем случае), на дно сосуда:

$$P_{\text{дн}} = \rho_{\text{в}}gh_{\text{в}} + \rho_{\text{к}}gh_{\text{к}}$$

Так как масса воды равна массе керосина, можно записать:

$$\rho_{\text{в}}gh_{\text{в}}S = \rho_{\text{к}}gh_{\text{к}}S,$$

где S – площадь основания цилиндрического сосуда.

Отсюда получаем:

$$\rho_{\text{в}}h_{\text{в}} = \rho_{\text{к}}h_{\text{к}}$$

Следовательно:

$$P_{\text{дн}} = 2g\rho_{\text{в}}h_{\text{в}}$$

$$h_{\text{к}} = \frac{\rho_{\text{в}}h_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}}$$

Тогда общую высоту слоёв можно записать в виде:

$$H = h_{\text{в}} \left(1 + \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}}\right)$$

Подставив выражения в уравнение давления на дно сосуда получим:

$$P_{\text{дн}} = \frac{2\rho_k \rho_k gH}{\rho_k + \rho_k}$$

Подставим числовые значения и получим:

$$P_{\text{дн}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 10 \cdot 0,36}{10^3(1+0,8)} = 3,2 \text{ кПа.}$$

$$P_{\text{сп}} = \frac{P_{\text{дн}}}{2} = 1,6 \text{ кПа.}$$

Ответ: 3,2 кПа и 1,6 кПа

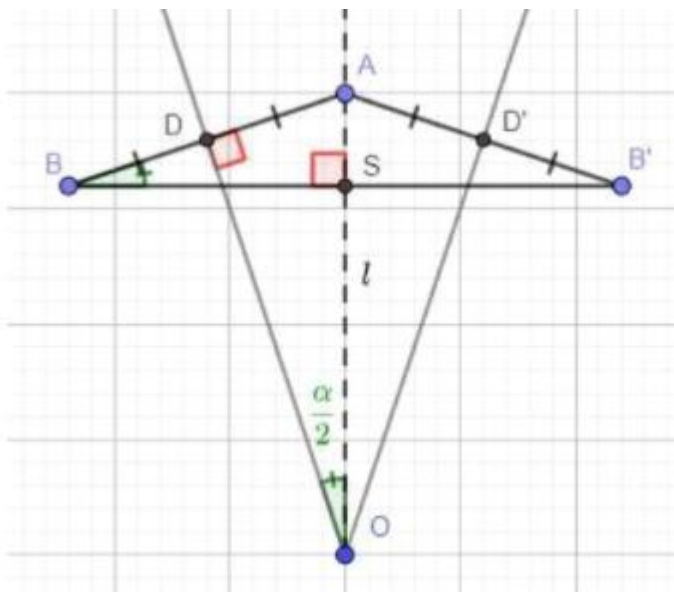
Критерии	Баллы
Записано уравнение давления жидкостей на дно сосуда	3
Получено соотношение высот столбов жидкостей	3
Выражено давление на дно сосуда через заданные величины	4
Верно выполнен численный расчёт искомых величин	2

Задание 3. (14 баллов) Два зеркала

Два плоских зеркала расположены под углом 45°. На биссектрисе угла между ними поместили небольшой предмет. Расстояние между его первыми изображениями оказалось равно 15 см. Найти расстояние от предмета до линии пересечения зеркал.

Решение:

Выполним построение изображений по условиям задачи (О – линия пересечения плоскостей зеркал, А – предмет).



Изображение В и В' находятся на таком же расстоянии от поверхности зеркал, что и предмет А:

$BD = B'D' = DA = D'A$, значит $\triangle ABB'$ - равнобедренный.

$\triangle ODA$ и $\triangle ASB$ подобны как два прямоугольных треугольника с общим острым углом, значит:

$$\angle ABB' = \angle DOA = \alpha/2$$

$$\text{Рассмотрим } \triangle ODA: DA = AO \cdot \sin(\alpha/2) = L \cdot \sin(\alpha/2)$$

$$AB = AB' = 2DA = 2L \cdot \sin(\alpha/2)$$

Расстояние между изображениями:

$$BB' = 2AB \cdot \cos(\alpha/2) = 4L \cdot \sin(\alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2) = 2L \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot 15 \cdot \sin(45^\circ) = 21,2 \text{ см}$$

Ответ: 21,2 см

Критерии	Баллы
Выполнено построение изображений предмета в зеркалах	4
Произведены все геометрические выкладки для поиска искомого расстояния	6
Выведена формула для расстояния между изображениями и получен численный ответ	2

Задание 4. (12 баллов) **Кипятильники**

Кипятильник малой мощности подключили к источнику постоянного напряжения 220 В. При постоянной температуре окружающей среды 25°C он нагрел стакан воды до температуры 80°C. Затем к первому кипятильнику последовательно подключили ещё один такой же и опустили его идентичный стакан воды. Какая температура установится во втором стакане, если количество теплоты, теряемое стаканом в единицу времени, прямо пропорционально разнице температур между температурами воды и воздуха?

Решение:

Во втором случае мощность, выделяющаяся в кипятильнике, падает, т.к. в 2 раза уменьшается напряжение на нем (то же напряжение распределяется на 2 последовательно соединенных кипятильника).

Когда кипятильник уже не сможет нагревать воду дальше, т.е. установится равновесие, будет выполнено условие равенства мощностей кипятильника и теплоотдачи в окружающую среду: $P_{\text{выдел. на кипят.}} = P_{\text{отдав. в окр. среду}}$. Для первого и второго кипятильников это условие имеет вид:

$$U^2/R = k(t_1 - t_{\text{комн}})$$

$$(U/2)^2/R = k(t_2 - t_{\text{комн}}),$$

где R – сопротивление кипятильника, k – некоторый коэффициент пропорциональности.

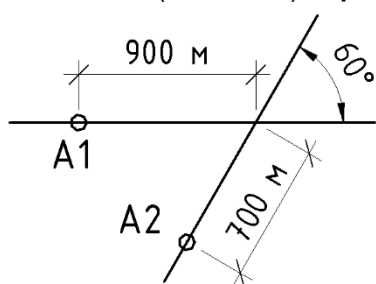
Поделив одно уравнение на другое, получим: $t_2 - t_{\text{комн}} = (t_1 - t_{\text{комн}})/4$

После преобразований найдем: $t_2 = 0,75 t_{\text{комн}} + 0,25 t_1 = 38,75 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ответ: 38,75 °C

Критерии	Баллы
Указано условие теплового баланса	3
Записаны уравнения мощностей для двух кипятильников	5
Определена искомая температура	4

Задание 5. (12 баллов) **Перекрёсток**



Два автомобиля (A1 и A2) подъезжают к перекрёстку дорог по углом 60°. В некоторый момент времени автомобили находились на расстоянии от перекрёстка показанном на рисунке. Скорости автомобилей постоянны и равны 36 км/ч и 72 км/ч соответственно. Какое кратчайшее расстояние будет между автомобилями и через какое время они на этом расстоянии окажутся?

Решение:

Вычислим проекции скорости второго автомобиля в горизонтальном и вертикальном направлении движения:

$$V_{2\text{гор}} = 72 \cdot \cos 60^\circ = 36 \text{ км/ч}$$

$$V_{2\text{верт}} = 72 \cdot \sin 60^\circ = 62,35 \text{ км/ч} = 17,3 \text{ м/с}$$

Поскольку оказалось, что $V_{2\text{гор}} = V_1$, можно рассматривать движение второго автомобиля относительно неподвижного первого в вертикальном направлении со скоростью $V_{2\text{верт}}$. Тогда кратчайшее расстояние между автомобилями:

$$L = 900 - 700 \cdot \cos 60^\circ = 550 \text{ м}$$

Чтобы оказаться на этом расстоянии второй автомобиль в относительном движении должен пройти:

$$S = 700 \cdot \sin 60^\circ = 606,2 \text{ м}$$

Это расстояние второй автомобиль пройдёт за время:

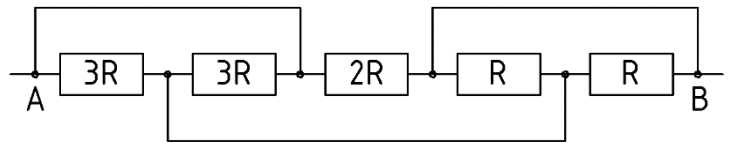
$$t = 606,2 / 17,3 = 35 \text{ с.}$$

Ответ: 550 м и 35 с

Критерии	Баллы
Выполнен переход на относительно движение автомобилей	3
Определено кратчайшее расстояние	4
Определено искомое время	5
Нет обоснования для кратчайшего расстояния между автомобилями	0 за работу

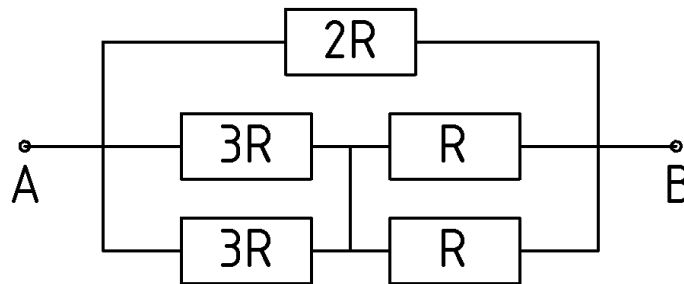
Задание 6. (14 баллов) Сложное сопротивление

Определите сопротивление между точками А и В.



Решение:

Заменим схему на эквивалентную ей:

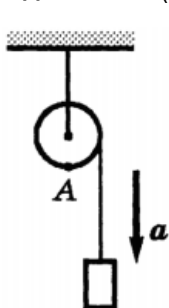


Сопротивление перерисованной схемы легко определить. Оно равно R.

Ответ: R

Критерии	Баллы
Исходная схема заменена на эквивалентную (перерисована)	6
Определено искомое сопротивление	8

Задание 7. (10 баллов) Шкив



Груз привязанный к невесомой нерастяжимой нити привязан, обмотанной вокруг закреплённого стержнем шкива. Груз начинает опускаться без начальной скорости с ускорением 2 м/с^2 . Чему равны угловая скорость шкива и ускорение точки А в тот момент, когда груз опустится на 1 м.

Решение:

Поскольку в исходных данных не указан радиус шкива, за верное решение будет считаться как решение с ответом в общем виде (без числовых подстановок), так и решение с ответом, выраженным через радиус шкива.

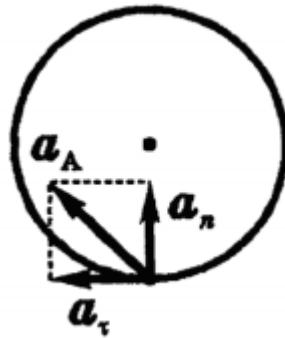
Скорость в момент времени, когда груз прошел с ускорением a путь S , равна:

$$V = \sqrt{2aS}.$$

Угловая скорость шкива в этот момент:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{\sqrt{2aS}}{R}$$

Ускорение точки А складывается из тангенциального (касательного) ускорения a_τ , направленного по касательной к траектории точки, и нормального a_n (центростремительного) ускорения, направленного к оси вращения (см. рисунок).



Нормальное ускорение равно:

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

Тогда:

$$a_A = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{(\sqrt{2aS})^2}{R}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{4S^2}{R^2} + 1}$$

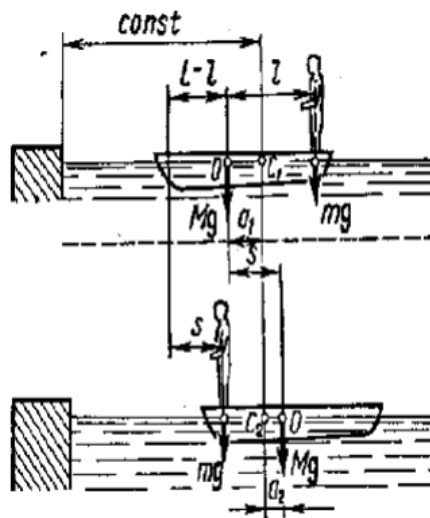
Критерии	Баллы
Получено уравнение для угловой скорости шкива	3
Получено уравнение для ускорения точки А	7

Задание 8. (12 баллов) **Человек и плот**

Человек массой 75 кг прошёл 6 м с одного края покоящегося плота на другой. На сколько сместится плот, если его вес 150 кг? Сопротивление воды пренебрежимо мало.

Решение:

Систему человек-плот относительно горизонтального направления можно рассматривать, как замкнутую. Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы замкнутой системы тел не могут изменить положение центра масс системы. Поэтому можно считать, что при перемещении человека по лодке, центр масс системы не изменит своего положения.



Пусть центр масс системы человек-плот находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку С1 лодки (см. рисунок), а после перемещения плота – через другую ее точку С2. Так как эта вертикаль неподвижна, то искомое перемещение S лодки равно перемещению лодки относительно вертикали. Из рисунка видно, что в начальный момент времени центр масс О плота находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека – на расстоянии a_2 справа от вертикали. Следовательно:

$$S = a_1 + a_2$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что результирующий момент сил, действующих на систему, относительно горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси плота, равен нулю. Для начального положения

$$Mga_1 = mg(l - a_1),$$

Откуда:

$$a_1 = \frac{ml}{M + m}$$

После перемещения

$$Mga_2 = mg(L - a_2 - l),$$

Откуда:

$$a_2 = \frac{m(L - l)}{M + m}$$

Следовательно:

$$S = \frac{ml}{M + m} + \frac{m(L - l)}{M + m} = \frac{mL}{M + m}$$

$$S = \frac{75 \cdot 6}{150 + 75} = 2 \text{ м}$$

Ответ: 2 м.

Критерии	Баллы
Показана неподвижность центра масс системы человек-плот	3
Рассмотрено положения центра масс системы до перемещения человека	3
Рассмотрено положения центра масс системы после перемещения человека	3
Верно определена и численно рассчитана искомая величина перемещения	3