1. В условии задачи была допущена ошибка, вместо функции $-\left(\frac{a\cdot b}{c}+\frac{a\cdot c}{b}+\frac{b\cdot c}{a}+5\cdot x\right)$ должна была рассматриваться функция

   $-\left(\frac{a\cdot b}{c}+\frac{a\cdot c}{b}+\frac{b\cdot c}{a}-5\cdot x\right)$ для нее максимальным значением в

   предложенных ограничениях на $a,\ b$ и c действительно является 427. В полный балл оценивались корректные решения, которые рассматривали любую из этих функций в предположении, что максимум равняется 427. Жюри приносит свои извинения за допущенную опечатку! Далее приводится решение для корректной функции, которое впрочем практически не отличается от решения для приведенной в условии функции. Рассмотрим сумму двух функций $F(a,\ b,\ c)\ +\ G(x)$, где $F(a,\ b,\ c)\ =-\left(\frac{a\cdot b}{c}+\frac{a\cdot c}{b}+\frac{b\cdot c}{a}\right)$, а $G(x)\ =\ 5\ \cdot x$,

   заметим, что максимум $F(a,\ b,\ c)$ не зависит от x, значит мы можем вычислить его основываясь на знании о том, что максимум суммы $F(a,\ b,\ c) +\ G(x) = [\text{при } x\ =\ 5]\ =\ 427$. Получаем, что $F(a,\ b,\ c)\ = 427\ -\ 5\ \cdot x\ =\ 427\ -\ 5\ \cdot 5\ =\ 427\ -\ 25\ =\ 402.$
   Подставим $F(a,\ b,\ c)$ в $F(a,\ b,\ c)\ +\ G(x)$ при $x\ =\ 10$, получаем $402\ +\ 5\ \cdot 10\ =\ 452$. В случае функции приведенной в условии задачи в рассуждениях меняется только знак при $G(x)$ и ответ равняется 402.

2. Существует несколько примеров графов, подходящих под условие задачи. В качестве примера приведем самую простую на наш взгляд конструкцию.
   Рассмотрим вершину А со степенью 10^6-10^3+1. Каждый из её соседей (будем говорить, что это вершины типа В) будет соединен ещё с 999 вершинами степени 1. Давайте теперь посчитаем, требуемую в графе характеристику.
   У всех соседей вершины А степень 1000. Значит среднее степеней её соседей равно 1000.
   У каждого из соседей вершин типа В, кроме вершины А, ровно по 1 соседу (это листья по построению). Тогда среднее степеней их соседей равно степени этого единственного соседа, а значит тоже равно 1000.
   У вершин типа В есть 999 соседей со степенью 1 и 1 сосед со степенью 10^6-10^3+1. Среднее степеней соседей в этом случае равно $\frac{10^6-10^3+1+999}{1000}=1000.$
   Получаем, что среднее степеней соседей каждой из вершин равно 1000. При этом в графе есть вершины степени 1 и вершины степени 1000, а значит условие задачи выполнено.
3. Пусть у Лёни есть строка длины Nи шаблон длины K, где $N\ \geq\ K$. Рассмотрим произвольный шаблон, в котором ровно n двоек и будем прикладывать его к началу строки. Посчитаем, сколько существует строк для которых такое наложение будет *хорошим.* Под каждой из двоек в строке должны стоять единицы, а во всех остальных позициях может стоять как 0, так и 1. Итого, получаем что для n позиций строки у нас 1 вариант символа, а для остальных $N\ -\ n$ есть 2 варианта. Значит таких строк - 2^{N-n}. Заметим, что наши рассуждения остаются верными и для приложения шаблона в произвольной из

$N - K + 1$позиций.
Также мы знаем, что количество шаблонов с n двойками равно $C_K^n = \frac{K!}{n!(K-n)!}$, то есть количеству способов выбрать подмножество из n позиций для двоек из множества всех позиций (размера K).
Теперь соберем всё вместе и преобразуем выражение.

$Answer = (N - K + 1) \sum_{n=0}^{K} C_K^n * 2^{N-n} =$

$(N - K + 1) * 2^{N-K} \sum_{n=0}^{K} C_K^n * 2^{K-n} * 1^n$ =[по биному Ньютона] =

$(N - K + 1) * 2^{N-K} * (1 + 2)^K = (N - K + 1) * 2^{N-K} * 3^K$.

Если подставить числа из задачи, то получим ответ $23 * 2^{68} * 3^{68}$.

4. Давайте в первую очередь покажем, что для всех чисел, которые не являются степенью двойки Вальдемар будет особенно счастлив.
В первую очередь заметим, что в двоичной записи числа ровно одна единица тогда и только тогда, когда число является степенью двойки. Мы рассматриваем число x, которое не является степенью двойки, поэтому мы знаем, что в его двоичной записи содержится хотя бы две единицы.
Рассмотрим разложение x на два слагаемых, одно из которых в двоичной записи содержит ровно одну единицу на одной из позиций, в которой в x стоит единица. Назовем такое слагаемое n. Тогда легко показать, что $n\, xor\, (x - n) = x$. Действительно, в этом случае результат операции побитового сложения во всех позициях будет совпадать с x. Значит произведение уже будет делиться на x.
Далее покажем, что для всех степеней двойки, кроме 4 это свойство тоже выполняется.
Заметим, что любая степень двойки в условиях задачи (так как числа больше 2) четна. Рассмотрим пару чисел (a, b), таких, что их сумма равна четному числу. Заметим, что раз сумма четна, то четность этих двух чисел совпадает. А значит, совпадает и последняя цифра в двоичной записи, из чего следует, что xorэтой пары будет четным.
Для числа 2^Nсуществует $2^{N-1} - 1$способ разложить это число на 2 *различных* слагаемых. Каждая из таких пар делится хотя бы на одну двойку. Таким образом произведение будет делиться хотя бы на 2 в степени $2^{N-1} - 1$.
Достаточно показать, что для $N > 2$выполняется $2^{N-1} - 1 \geq N$.
Воспользуемся методом математической индукции.
База: при $N = 3$выполняется $2^2 - 1 \geq 3$.
Предположение индукции: пусть для $N = K$выполнено условие.
Шаг индукции: покажем, что это верно и для $N = K + 1$.
$2^K - 1 \geq 2 * (2^{K-1} - 1) \geq 2 * K \geq K + 1$ - доказано.
Мы показали, что для всех чисел кроме 4 условие выполняется. Осталось разобрать случай с 4 ручками. Существует ровно одна пара различных натуральных чисел, дающих в сумме 4: 1 и 3. Их xorравен 2, поэтому это число нам не подходит.

Ответ: Вальдемар будет особенно рад при всех натуральных числах больше 2, кроме 4.