1. а) Да, например при $N = 3,\ K = 2$единственный оставшийся кубик будет иметь на себе цифру 5 - простое число.

   б) Заметим, что при $N,\ K$нечетных у нас останется четное количество кубиков (не меньше 2). Очевидно, что сумма при этом будет четна, а значит уже делится на 2. Для того, чтобы сумма была простым числом достаточно доказать, что она будет не меньше 2 (ведь это единственное четное простое число). Заметим, что сумма двух последовательных нечетных чисел уже не меньше 2, ведь (2a - 1) + (2a + 1) = 4a, где a - натуральное число.

2. Обозначим за a искомый массив, а за $a[i]$— i-ый элемент данного массива, также обозначим xor всех элементов с i по j за $xor(i,\ j)$. Спросим про все подотрезки массива длиной больше трех. Допустим в данный момент мы спрашиваем про подотрезок массива с границами l и r. Для этого подотрезка спросим про подотрезок с границами $l + 1$ и $r - 1$. Заметим, что xor элементов на первом и втором подотрезках совпадают тогда и только тогда, когда $a[l] = a[r]$. Действительно, если $a[l] = a[r]$, то $a[l]\ xor\ a[r] = 0$(вытекает из определения xor), пусть $xor(l + 1,\ r - 1)$равняется X, тогда $xor(l,\ r)$ равняется $a[l]\ xor\ X\ xor\ a[r] = (a[l]\ xor\ a[r])\ xor\ X = 0\ xor\ X = X$ (так как xor — коммутативная и ассоциативная операция с нейтральным элементом 0). Теперь пусть $xor(l,\ r) = xor(l + 1,\ r - 1) = X$, рассмотрим $0 = (xor(l,\ r))\ xor\ (xor(l + 1,\ r - 1)) = a[l]\ xor\ a[r]$, первое равенство выполняется, потому что $(xor(l,\ r))\ xor\ (xor(l + 1,\ r - 1)) = X\ xor\ X = 0$(из определения xor), второе равенство выполняется так как все элементы из меньшего подотрезка встречаются в большем, а значит их xor обращается в 0 (опять же из-за коммутативности и ассоциативности), значит в результате этого xor останутся только элементы у которых нет пары, а именно $a[l]$ и $a[r]$.Отсюда получаем $a[l]\ xor\ a[r] = 0$, а из этого уже по определению xor вытекает, что $a[l] = a[r]$. Таким образом утверждение доказано и как только мы находим пару таких отрезков, то мы находим и равные элементы. Однако данное решение не работает, если равные элементы находятся на расстоянии 1 или 2 ($r - l = 1$ или $r - l = 2$), так как в этом случае нужно спрашивать xor пустого подотрезка или подотрезка длины 1, что запрещено условием. Разберем случай, когда $r - l = 1$, для этого спросим xor всех подотрезков с l по $l + 1$ (для всех l для которых существует $l + 1$элемент), заметим, что если это значение обращается в 0, то мы нашли искомую пару (по доказанному выше). Теперь разберем случай с $r - l = 2$, для этого спросим $xor(l,\ l + 1)$ и $xor(l + 1,\ l + 2)$ для всех таких l для которых существует элемент с номером $l + 2$. Рассмотрим $(xor(l,\ l + 1))\ xor\ (xor(l + 1,\ l + 2)) = a[l]\ xor\ a[l + 1]\ xor\ a[l + 1]\ xor\ a[l + 2] = a[l]\ xo$ отсюда мы получаем, что если $a[l]\ xor\ a[l + 2] = 0$, то $a[l] = a[l + 2]$. Описанным выше способом для любого расстояния между равными элементами мы научились находить их. Посчитаем количество запросов, которое придется задать. Заметим, что мы рассмотрим все подотрезки массива, кроме подотрезков длины 1, при этом про некоторые из них мы спросим дважды (про некоторые спросим 1 раз, но это не уменьшает оценку). Обозначим за Y количество рассмотренных отрезков, тогда мы сделаем не больше $2 \cdot Y$

запросов. $Y = C_{100}^{2}$, так как нам нужно выбрать левую границу подотрезка, правую границу подотрезка и порядок нам не важен.
$2 \cdot Y = 2 \cdot \frac{100!}{2! \cdot 98!} = 99 * 100 < 100000$. Упражнение: можно ли решить данную задачу за Y запросов?

3. Пусть у Лёни есть строка длины Nи шаблон длины K, где $N \geq K$. Рассмотрим произвольный шаблон, в котором ровно n двоек и будем прикладывать его к началу строки. Посчитаем, сколько существует строк для которых такое наложение будет *хорошим.* Под каждой из двоек в строке должны стоять единицы, а во всех остальных позициях может стоять как 0, так и 1. Итого, получаем что для n позиций строки у нас 1 вариант символа, а для остальных $N - n$ есть 2 варианта. Значит таких строк - 2^{N-n}. Заметим, что наши рассуждения остаются верными и для приложения шаблона в произвольной из $N - K + 1$позиций.
   Также мы знаем, что количество шаблонов с n двойками равно $C_{K}^{n} = \frac{K!}{n!(K-n)!}$, то есть количеству способов выбрать подмножество из n позиций для двоек из множества всех позиций (размера K).
   Теперь соберем всё вместе и преобразуем выражение.
   $Answer = (N - K + 1) \sum_{n=0}^{K} C_{K}^{n} * 2^{N-n} =$
   $(N - K + 1) * 2^{N-K} \sum_{n=0}^{K} C_{K}^{n} * 2^{K-n} * 1^{n}$ =[по биному Ньютона] =
   $(N - K + 1) * 2^{N-K} * (1 + 2)^{K} = (N - K + 1) * 2^{N-K} * 3^{K}$.
   Если подставить числа из задачи, то получим ответ $2 * 2 * 3^{49} = 4 * 3^{49}$.

4. Будем называть процесс закрашивания клетки и её соседей *операцией*. Рассмотрим какую-то последовательность операций, которые сделал Вася. Заметим, что цвет каждой клетки однозначно восстанавливается из количества операций, которые имели эффект на неё. Из этого можно сделать вывод, что нам не важно, в каком порядке мы производили операции, нам важно только лишь количество каждой из уникальных операций.
   Теперь заметим, что применение одной и той же операции Nраз имеет тот же эффект, что и её применение $N mod\, 2$раз. Действительно, четность количества перекрашиваний клеток от этого не изменится, а значит не изменится и их цвет. Таким образом, мы можем рассматривать лишь подмножество уникальных операций (это не уменьшит количество итоговых конфигураций).
   Теперь покажем, что каждое подмножество уникальных операций порождает уникальный рисунок.
   Предположим, что это не так, то есть мы нашли два различных подмножества уникальных операций, которые сгенерировали одинаковый рисунок.
   Рассмотрим все такие операции, которые встречаются только в одном из подмножеств. Из всех таких операций нас интересует самая левая и из самых левых самая верхняя операция (операции будем сравнивать по их центральной клетке).

Пусть центральная клетка этой операции имеет координаты $(x,\ y)$(строка и столбец, будем нумеровать их из левого верхнего угла). Рассмотрим клетку $(x,\ y - 1)$. Заметим, что её четность отличается в этих двух подмножествах. Действительно, любая из операций, отличная от операции на $(x,\ y)$, которая может иметь эффект на $(x,\ y - 1)$, одновременно присутствует или одновременно отсутствует в обоих подмножествах, так как существование операции в одном из подмножеств приводит к противоречию с тем, что левее клетки$(x,\ y)$не существует отличающихся операций.
Мы предполагали, что рисунок получился одинаковым, но сейчас мы нашли клетку, цвет которой отличается для этих подмножеств операций. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и каждое подмножество уникальных операций приводит нас к уникальному рисунку.

Осталось подсчитать количество таких подмножеств. Всего у нас 62^2 допустимых операций. Каждую из операций мы можем включить или не включить в подмножество. Таким образом мы получаем ответ: 2^{62^2}.