8-9 класс

1. Велосипедист выехал из города A в город B, расстояние между которыми равно 100 км. Оказалось, что для любого t его средняя скорость v_t в первые t часов пути может быть вычислена по формуле $v_t = S + t$, где $S -$ путь в километрах, который осталось проехать велосипедисту. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути. (15 баллов)

   Решение: По определению, средняя скорость v_t в первые t часов пути вычисляется по формуле $v_t = \frac{S\prime}{t}$, где $S' -$ пройденный велосипедистом путь. Тогда $S + t = \frac{100-S}{t}$. Для вычисления времени, которое велосипедист пребывал в пути, необходимо подставить $S = 0$. В итоге $t = \frac{100}{t}$, откуда $t = 10$. Тогда средняя скорость велосипедиста на протяжении всего пути равна $\frac{100\text{ км}}{10\text{ ч}} = 10$ км/ч.

   Ответ: 10 км/ч

2. Различные числа a, b, c таковы, что $(a-1)(a-b+c) = (b-1)(b-a+c)$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $a+b+c$. (15 баллов)

   Решение: Раскроем скобки в обеих частях, после чего перенесём всё в левую часть.
   $a^2 - ab + ac - a + b - c = b^2 - ab + bc - b + a - c.$
   $a^2 - b^2 + ac - bc + 2b - 2a = 0.$
   $(a-b)(a+b) + (a-b)c - 2(a-b) = 0.$
   $(a-b)(a+b+c-2) = 0.$
   Поскольку $a \neq b$, то $a+b+c = 2$.

   Ответ: 2

3. Саша загадал 4 различных положительных чисел и в каждой паре чисел нашёл отношение суммы чисел к их произведению. Пять из шести полученных результатов оказались следующими: $\frac{1}{20}, \frac{2}{15}, \frac{1}{6}, \frac{41}{120}, \frac{9}{24}$. Найдите все значения, которые может принимать шестой результат. (15 баллов)

   Решение: Обозначим исходные числа через a, b, c, d, причём $a \geq b \geq c \geq d$. Тогда 6 полученных Сашей результатов равны $\frac{a+b}{ab}, \frac{a+c}{ac}, \frac{a+d}{ad}, \frac{b+c}{bc}, \frac{b+d}{bd}, \frac{c+d}{cd}$. Эти числа можно переписать в виде $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \frac{1}{a}+\frac{1}{c}, \frac{1}{a}+\frac{1}{d}, \frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \frac{1}{b}+\frac{1}{d}, \frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Заметим, что полученные числа разбиваются на 3 пары с суммой равной $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

   Найдём среди пяти данных нам чисел две пары с равной суммой. Для этого приведём все дроби к общему знаменателю и получим $\frac{6}{120}, \frac{16}{120}, \frac{20}{120}, \frac{41}{120}, \frac{45}{120}$. Несложно видеть, что такие пары чисел можно выбрать единственным способом – это $\frac{16}{120}, \frac{45}{120}$ и $\frac{20}{120}, \frac{41}{120}$. Сумма чисел в каждой паре равна $\frac{61}{120}$. Значит шестой результат равен $\frac{61}{120} - \frac{6}{120} = \frac{11}{24}$.

Ответ: $\frac{11}{24}$

Замечание: Пример чисел, удовлетворяющих условиям задачи, приводить не нужно.

4. У Даши есть 3 настоящие одинаковые монеты, но Катя подложила ей одну фальшивую монету, легче настоящей. Для определения фальшивой монеты Катя любезно предложила Даше воспользоваться её чашечными весами без гирь, но при этом разрешила ей только выбирать, какие монеты на какую чашу класть, а результаты взвешиваний будет называть сама Катя. После любого взвешивания она может сказать какая из чаш перевесила или что весы в равновесии. Чтобы Даше было сложнее найти фальшивую монету, Катя по очереди говорит ей правильный и неправильный результат взвешиваний, при этом неизвестно, что она скажет при первом взвешивании – правду или ложь. Сможет ли Даша за несколько взвешиваний определить фальшивую монету? (15 баллов)

Решение: Пронумеруем монеты числами 1, 2, 3, 4. Если Даша узнает хотя бы одно из взвешиваний, в котором Катя сказала неправду, то она сможет определить фальшивую монету. Действительно, ведь тогда она сможет совершать необходимые для этого взвешивания только тогда, когда Катя будет говорить правду, а именно:

1) Сперва Даша взвесит пары 1, 2 и 3, 4. Чаша, оказавшаяся легче, содержит фальшивую монету.

2) Затем (через одно взвешивание) она сравнит монеты из лёгкой кучки. Та, которая легче, фальшивая.

Теперь покажем, что Даша сможет определить, когда Катя врёт, а когда говорит правду. Для этого сделаем пару взвешиваний:

1) 1, 2 и 3, 4

2) 1, 3 и 2, 4

В каждом из взвешиваний присутствует одна фальшивая монета, а значит равенство чаш невозможно. Поэтому, если Катя хоть в одном взвешивании скажет, что весы уравновесились, то она соврала. Если ни в одном из взвешиваний Катя не говорила про равенство чаш, то в каждом из взвешиваний перевешивала либо левая, либо правая чаша. Если оба раза она сказала одно и то же, то монеты 1 и 4 – настоящие, ведь если бы Даша поменяла местами обе настоящие монеты, то истинный результат не изменился бы, а значит Катя оба раза сказала правду или оба раза солгала, что невозможно. Если же Катя ответила по-разному, то монеты 2 и 3 – настоящие, так как иначе мы бы оказались в предыдущей ситуации. После двух взвешиваний Даша точно знает две настоящие монетки, и следующим взвешиванием сравнивает их. Если Катя сказала, что весы в равновесии, то она сказала правду, иначе – солгала. Таким образом, Даша всегда сможет поймать Катю на лжи и выяснить, какая из монет фальшивая.

Ответ: сможет

5. В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и B взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. На стороне AB отмечены точки P и Q так, что $AP = PQ = QB$. Доказать, что периметр треугольника CPQ меньше удвоенного периметра треугольника ABM. (20 баллов)

   Решение: Пусть медиана CM пересекает сторону AB в точке K. По условию задачи, треугольник $ABM -$ прямоугольный, а значит $2MK = AB$. По свойству медианы имеем $2MK = CM$, следовательно, $CM = AB$. Так как $AP = BQ$ и $AK = BK$, то $PK = QK = \frac{1}{2}PQ$. Пусть $PQ = 2x$, тогда $AP = QB = PQ = 2x$, $AB = CM = 6x$, $MK = 3x$, $CK = 9x$, $PQ = QK = x$. Из неравенства треугольника следует, что $P_{CPQ} = CP + CQ + PQ < (CK + PK) + (CK + QK) + PQ = (9x + x) + (9x + x) + 2x = 22x$.

   Также из неравенства треугольника следует, что $2P_{ABM} = 2AM + 2BM + 2AB > 4AB = 24x$, откуда $P_{CPQ} < 2P_{ABM}$, что и требовалось доказать.

6. На бумажной ленте написано некоторое число, не содержащее нулей. Миша может разрезать ленту между любыми двумя цифрами и получить два новых числа. Оказалось, что как бы Миша ни разрезал ленту, сумма полученных чисел всегда будет равна некоторой натуральной степени семёрки. Из какого наибольшего количества цифр может состоять число, записанное на ленте? (20 баллов)

   Решение: Обозначим число, записанное на ленте через $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Любое число при делении на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр. Это означает, что как бы Миша ни разрезал ленту, сумма двух полученных чисел будет иметь такой же остаток при делении на 9, как и число $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, то есть остаток всегда один и тот же для конкретного числа a. Докажем вспомогательную лемму.

   Лемма: если две различные степени семёрки имеют одинаковый остаток при делении на 9, то одно из них больше другого хотя бы в 343 раза.

   Доказательство: Пусть числа 7^m и 7^k имеют одинаковый остаток при делении на 9 ($m > k$). Тогда $7^m - 7^k = 7^k(7^{m-k} - 1) \vdots 9$, откуда $7^{m-k} - 1 \vdots 9$. Но при $m - k < 3$ это неверно,

значит $m-k\geq 3$, а значит $7^m \geq 7^3\cdot 7^k = 343\cdot 7^k$, что и требовалось доказать.
Предположим, что в числе a есть хотя бы 5 цифр ($n\geq 5$). Рассмотрим сумму чисел при двух разрезах: $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}+a_n$ и $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$. Так как все цифры на ленте не равны нулю, то $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}} > 11\ldots 1$ ($n-1$ единица). Заметим, что $10^{n-2}+10^{n-3} < \overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}+a_n$ и $10<\overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n} < 10^{n-3}+10^3$. Поскольку $n\geq 5$, то $10^{n-3}+10^3\leq 10^{n-2}+10^{n-3}$, из чего следует, что $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}+a_n > \overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$. С другой стороны, $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}+a_n = 100\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+\overline{a_{n-2}a_{n-1}}+a_n < 100\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+100\cdot\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$, а следовательно $\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}+a_n}{\overline{a_1a_2\ldots a_{n-3}}+\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}} < 100 < 343$, что противоречит лемме. Значит в числе a не более 4 цифр.
Предположим, что на ленте написано число $a=\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Очевидно, что $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4} < 343$, значит число $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}$ является двузначной степенью семёрки, то есть $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}=49$. Но число $\overline{a_1a_2a_3}+a_4$ состоит из трёх или четырёх цифр и отличается от предыдущего хотя бы в 343 раза, то есть оно не меньше, чем $49\cdot 343 = 16807$ – противоречие. Значит в числе a не более 3 цифр.
Трёхзначное число, которое могло быть записано на ленте, это 445. Действительно, $4+45=44+5=7^2$.

Ответ: 3

10-11 класс

1. Существуют ли 4 различных натуральных числа, больших единицы, таких, что сумма квадратов любых трёх из них делится на оставшееся число, увеличенное на единицу? (15 баллов)

   Решение: Существуют, например, подойдут числа 2, 3, 6, 48.

2. На доске написано 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Максим нашёл все попарные произведения этих чисел и выписал их на доску, после чего, стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Затем он нашёл все попарные произведения оставшихся чисел и выписал их на доску, после чего снова стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Сколько теперь чисел написано на доске? (15 баллов)

   Решение: Для удобства, обозначим изначально записанные на доске числа, как $p_1, p_2, \dots, p_{10}$. Поскольку любые два начальных числа взаимно просты, все попарные произведения будут различными, а всего их будет $C_{10}^2 = 45$. Именно столько чисел останется после того, как Максим сотрёт все изначальные числа. Все оставшиеся числа имеют вид $p_i p_j$, где $1 \le i, j \le 10, i < j$. Произведение двух оставшихся чисел может быть одного из двух видов: $p_k p_l p_m p_n$ или $p_k p_l^2 p_n$, где $k \ne l \ne m \ne n$.

   Всего различных чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ столько же, сколько и различных четвёрок чисел k, l, m, n, а их всего $C_{10}^4 = 210$. Каждое из чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ может быть получено тремя способами: при перемножении чисел $p_k p_l$ и $p_m p_n$, $p_k p_m$ и $p_l p_n$ или $p_k p_n$ и $p_l p_m$. То есть каждое из таких чисел будет написано трижды, поэтому с учётом повторяющихся чисел всего их будет написано 630.

   Чтобы узнать количество чисел вида $p_k p_l^2 p_n$, необходимо вычесть из количества всех чисел количество чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ (с учётом повторяющихся). После второго действия до того, как будут стёрты повторяющиеся числа, их будет всего $C_{45}^2 = 990$. Значит чисел вида $p_k p_l^2 p_n$ всего $990 - 630 = 360$. Но каждое из чисел вида $p_k p_l^2 p_n$ может быть получено лишь одним способом – при перемножении чисел $p_k p_l$ и $p_l p_n$, поэтому повторяющихся чисел такого вида не будет. Значит после того, как Максим сотрёт все повторяющиеся числа, на доске останется $210 + 360 = 570$ чисел.

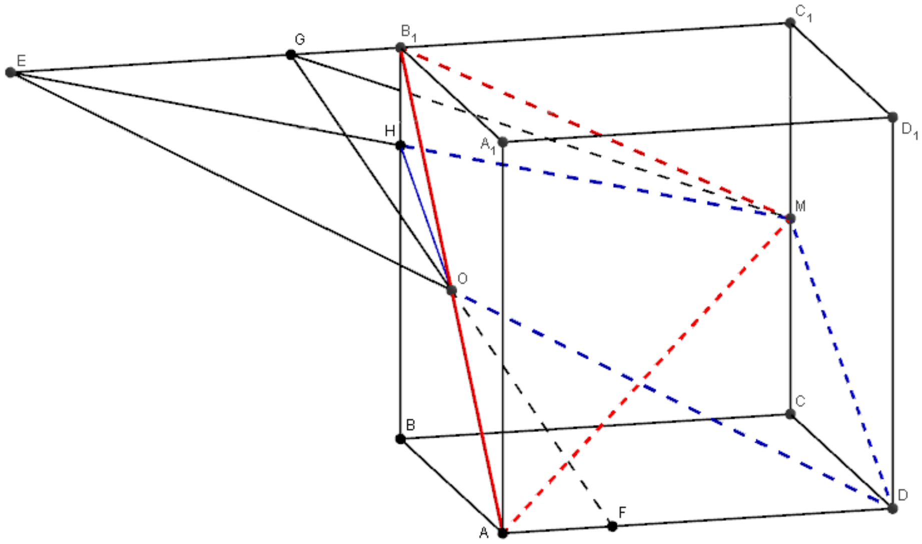
   Ответ: 570

   Замечание: Баллы за задачу не снимались, если условие понималось так, что после второго действия Максим стирал все числа вида $p_k p_l p_m p_n$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все рёбра которого равны единице, точка M – середина ребра CC_1,

точка O — центр грани ABB_1A_1. Множество точек, лежащих на грани CBB_1C_1, таково, что для любой точки X этого множества плоскость XOM пересекает ребро AD. Найдите площадь этого множества. (15 баллов)

Решение: Построим плоскость AOM. Для этого найдём точку пересечения прямой AO с плоскостью BB_1C_1C. Очевидно, что это будет точка B_1. Значит сечение куба плоскостью AOM пересекает ребро BB_1 в точке B_1.



Построим плоскость DOM. Для этого найдём точку пересечения прямой DO с плоскостью BB_1C_1C. Прямые DO и B_1C_1 лежат в плоскости AB_1C_1D, а $AD||B_1C_1$, значит DO пересекает B_1C_1. Обозначим их точку пересечения через E, она также лежит в плоскости DOM. Прямая EM также лежит в плоскости DOM и пересекает ребро BB_1 в некоторой точке H. Заметим, что треугольники EB_1O и AOD равны, значит $EB_1 = AD = B_1C_1$. Треугольники EB_1H и EC_1M подобны с коэффициентом 2, значит $B_1H = \frac{1}{2}C_1M = \frac{1}{4}$.

Пусть X — некоторая точка искомого множества и плоскость XOM пересекает ребро AD в точке F. Прямая FO лежит в плоскости AB_1C_1D, а значит точка пересечения G прямой FO с плоскостью BB_1C_1C лежит на отрезке EB_1. Прямая MG лежит в плоскости XOM, причём она заключена между прямыми EM и B_1M. Поскольку точка X лежит в плоскостях BB_1C_1C и FOM, то она лежит на прямой MG, а следовательно – внутри треугольника HB_1M, значит треугольник HB_1M — искомое множество. $S_{HB_1M} = \frac{1}{2}B_1H \cdot C_1B_1 = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{1}{8}}$

4. Геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots , a_n$, в которой все члены различны, такова, что числа $a_1, a_2^2, a_3^3, \dots , a_n^n$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Какое наибольшее значение может принимать n? (15 баллов)

Решение: Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q. Предположим, что $n \geq 4$, тогда в исходной прогрессии точно присутствуют числа $a_1, a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, a_4 = a_1 q^3$. Тогда по свойству арифметической прогрессии имеем $\begin{cases} 2(a_1q)^2 = a_1 + (a_1q^2)^3 \\ 2(a_1q^2)^3 = (a_1q)^2 + (a_1q^3)^4 \end{cases}$.

Поскольку все члены геометрической прогрессии различны, то $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0, q \neq 1$.

Поделим первое уравнение системы на a_1, а второе – на $(a_1q)^2$. Получим

$\begin{cases} 2a_1q^2 = 1 + a_1^2q^6 \\ 2a_1q^4 = 1 + a_1^2q^{10} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} a_1^2q^6 - 2a_1q^2 + 1 = 0 \\ a_1^2q^{10} - 2a_1q^4 + 1 = 0 \end{cases}$.

Решая первое уравнение системы, как квадратное относительно a_1, получаем

$a_{1_{1,2}} = \frac{2q^2 \pm \sqrt{4q^4 - 4q^6}}{2q^6} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^4}$.

Решая второе уравнение системы, как квадратное относительно a_1, получаем

$a_{1_{1,2}} = \frac{2q^4 \pm \sqrt{4q^8 - 4q^{10}}}{2q^{10}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^6}$.

Из этого следует, что $\frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^6}$.

Если $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$ или $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$, то $q^4 = q^6$. Полученное уравнение имеет решение только лишь при $q = 0, q = 1, q = -1$. Ранее было отмечено, что первые два варианта невозможны. Если $q = -1$, то $a_1 = \frac{1}{a_1}$ или $a_1^2 = 1$. Но тогда прогрессия имеет либо вид $1, -1, 1, -1$, либо вид $-1, 1, -1, 1$, что невозможно по условию.

Если $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1-\sqrt{1-q^2}}{q^6}$ или $\frac{1-\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$, то $q^2 \pm q^2\sqrt{1-q^2} = 1 \mp \sqrt{1-q^2}$, откуда $q^2 - 1 = \pm(q^2+1)\sqrt{1-q^2}$. Поскольку $q^2 + 1 > 0$ и $q^2 - 1 < 0$, то уравнение $q^2 - 1 = (q^2+1)\sqrt{1-q^2}$ не имеет решений, а значит $q^2 - 1 = -(q^2+1)\sqrt{1-q^2}$.

$$1 - q^2 = (q^2+1)\sqrt{1-q^2},$$

$$\sqrt{1-q^2} = q^2 + 1.$$

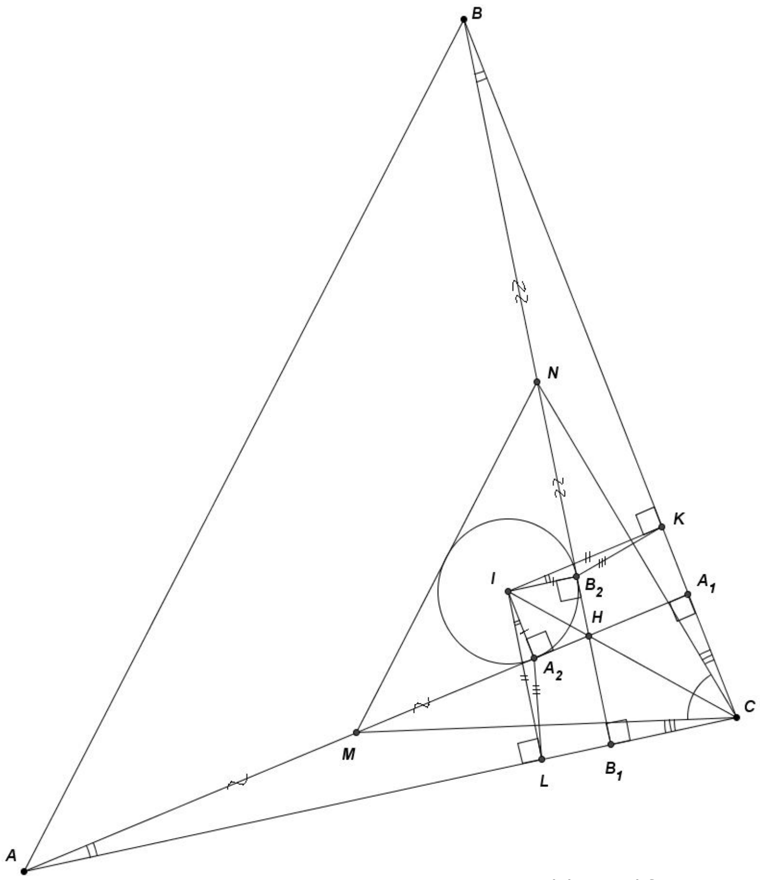
Но $q^2 + 1 > 1$, а $1 - q^2 < 1$, поэтому уравнение также не имеет решений, а значит, $n < 4$.

При $n = 3$ такая прогрессия существует, например, при $a_1 = \frac{8}{9}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 3

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Точки M и N – середины высот AA_1 и BB_1. Оказалось, что центр I вписанной в треугольник HMN окружности лежит на биссектрисе угла MCN. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C с общим углом при



вершине C. Они подобны, поэтому $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ и $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$. Так как $AM = \frac{1}{2}AA_1$ и $BN = \frac{1}{2}BB_1$, то $\frac{AM}{BN} = \frac{AC}{BC}$, а значит треугольники AMC и BNC подобны и $\angle ACM = \angle BCN$. Последнее равенство означает, что биссектриса CI угла MCN является также биссектрисой угла ACB. Из точки I опустим перпендикуляры IA_2 и IB_2 на прямые AH и BH соответственно, а также перпендикуляры IL и IK на прямые AC и BC соответственно. Так как точка I лежит на биссектрисе угла ACB, то $IL = IK$. Так как I − центр вписанной в треугольник HMN окружности, то $IA_2 = IB_2$. Прямые углы IB_2B и IKB опираются на отрезок BI, а значит четырёхугольник BKB_2I − вписанный и $\angle KIB_2 = \angle KBB_2$, как вписанные. Аналогично доказывается, что $\angle LIA_2 = \angle LAA_2$. По уже доказанному, $\angle LAA_2 = \angle KBB_2$, а значит $\angle KIB_2 = \angle LIA_2$, из чего следует равенство треугольников LIA_2 и KIB_2. Отсюда получаем $A_2L = B_2K$, $\angle KB_2B = \angle AA_2L$ и $\angle BKB_2 = \angle ALA_2$, а значит треугольники AA_2L и BB_2K равны. Из равенства этих треугольников следует, что $AA_2 = BB_2$, а $HA_2 = HB_2$ по свойству отрезков касательных, а значит $AH = BH$, то есть треугольник ABH − равнобедренный. Из равнобедренности получаем $\angle ABH = \angle BAH$, откуда $\angle ABC = \angle BAC$ и треугольник ABC − равнобедренный, что и требовалось доказать.

Замечание: Отметим также, что точки M и N могли оказаться на отрезках HA_1 и HB_1. Если они обе эти точки попали на отрезки HA_1 и HB_1, то решение получается аналогичным. Если же одна точка попала на один из указанных отрезков, а вторая – нет, то центр I вписанной в треугольник HMN окружности не будет лежать на биссектрисе угла MCN. За отсутствие доказательства этого факта баллы не снижались.

6. Имеется квадрат 6×6. Два игрока по очереди покрывают его полосками. Первый игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×4 на свободные клетки, а второй игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×2 на свободные клетки. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество полосок может гарантированно выложить первый игрок? (20 баллов)

Решение: Для удобства в дальнейшем будем называть первого игрока «Первым», а второго игрока – «Вторым». Докажем, что Первый не сможет поставить на доску более 4 полосок. Рассмотрим 8 закрашенных клеток, как показано на рисунке 1. Заметим, что любая полоска 1×4 покрывает ровно одну закрашенную клетку.

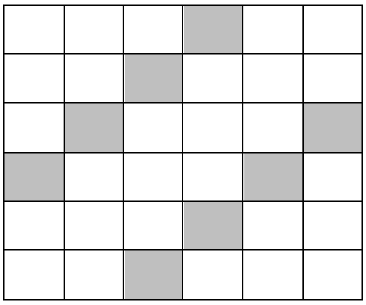


Рис. 1

Если Первый сумеет сделать четыре хода, то он покроет какие-то 4 закрашенные клетки. Чтобы не дать Первому сделать пятый ход, Второй каждый свой ход также будет покрывать какую-то серую клетку, а если в какой-то момент Второй не сможет положить полоску 1×2 ни на какую закрашенную клетку, то и Первый не сможет положить полоску 1×4 ни на какую закрашенную клетку, и игра закончится раньше. Значит Второй может помешать Первому сделать 5 и более ходов.

Докажем, что Первый сможет выложить четыре полоски 1×4. Рассмотрим первые два хода Первого.

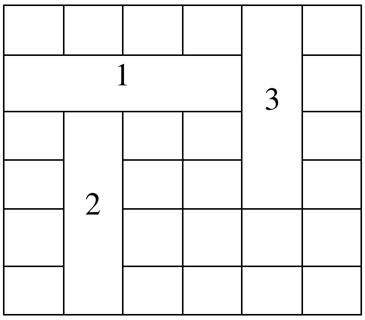


Рис. 2

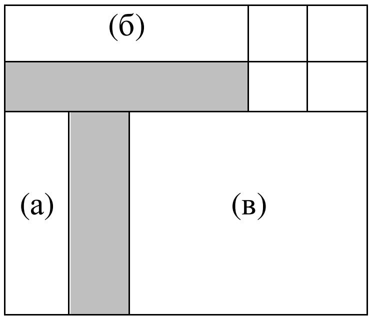


Рис. 3

Пусть Первый своим первым ходом положил полоску 1×4 на место прямоугольника 1 (см. рис. 2). После этого при любом своём ходе Второй не сможет положить полоску 1×2 так, чтобы она налегала и на прямоугольник 2, и на прямоугольник 3. Значит Первый своим вторым ходом сможет положить полоску 1×4 либо на прямоугольник 2, либо на прямоугольник 3. Без ограничения общности, пусть он смог положить полоску на прямоугольник 2. Затем Второй сделает свой второй ход. Поделим доску на области (а), (б), (в) (см. рис. 3) и рассмотрим все возможные варианты первых двух ходов Второго.

1) Оба хода были совершены в область (в). Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской область (а). Если после этого Второй своим ходом не задевает область (б), то Первый своим четвёртым ходом накрывает полоской область (б). Если же Второй своим ходом задевает область (б), то внутри области (в) всего две полоски 1×2. Каждая полоска 1×2 пересекает либо два столбца и одну строку, либо две строки и один столбец. Значит как бы Второй игрок не положил свои полоски в область (в), в ней найдётся хотя бы один столбец или хотя бы одна строка, которые не пересекли полоски. Именно эту строку (столбец) Первый накрывает полоской 1×4.

2) Один из ходов был совершён в область (в), а другой ход задел пересёк область (а), пересёк область (б) или не пересёк ни одну из них. Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской ту область среди (а) или (б), которая не была задета полосками Второго игрока (если они обе не задеты, то Первый кладёт полоску в любую область). После третьего хода Второго в области (в) не может оказать более двух полосок 1×2, а значит, как было доказано ранее, Первый сможет положить четвёртую полоску 1×4 в область (в).

3) Оба хода не пересекли область (в). Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской область третью сверху строку области (в). Как бы ни после этого не сходил Второй, хотя бы одна из строк области (в) останется нетронутой, и Первый своим четвёртым ходом накроет её полоской 1×4.

Тем самым мы доказали, что Первый сможет выложить на доску 4 полоски 1×4 независимо от действий Второго.

Ответ: 4