8 класс

Задача 1.

1. Давайте покрасим все розы с четным номером в белый цвет, а все нечётные - в красный. Тогда очевидно, что сумма любых двух номеров белых роз будет чётной, то есть будет соответствовать белой розе. Аналогично, произведение номеров белой и красной розы, то есть четного и нечетного числа, будет чётным, а значит соответствует белой розе. Мы убедились, что такая раскраска нас устраивает.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное обоснование оценивались в 0 баллов.
2) Полное решение подпункта оценивалось в 10 баллов.
3) Решения, отличные от решения жюри, оценивались по тем же критериям.

2. Посмотрим на розу с номером 1.

Пусть она имеет белый цвет. 1 + 1 = 2, а значит, и роза с номером 2 является белой. Можно доказать по индукции, что все розы в этом случае будут белыми, а значит, нас этот вариант не устраивает.

Пусть у нас есть какая-то корректная раскраска, которая устраивает королеву, в котором первая роза - красная. Тогда рассмотрим произвольную белую розу в этой раскраске. Произведение номера этой белой розы на единицу должно иметь красный цвет по условиям. Получили противоречие, а значит и этот вариант нам не подходит.

То есть раскрасок, которые удовлетворяют королеву, не существует.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2) Полное решение подпункта оценивалось в 15 баллов. Жюри могло снимать баллы за различные неточности в решении.

Задача 2

Рассмотрим решение сразу для второго пункта.

Так как операция xor ассоциативна, то $f(n) = f(n-1) xor n$.
Узнаем у Алисы значения $f(n+1)$ и $f(n+2)$. Тогда, используя также коммутативность операции xor и тот факт, что $A xor A = 0$, получаем $f(n+2) xor f(n+1) = f(n-1) xor (n+2) xor f(n-1) = n + 2$

То есть $n = (f(n+2) xor f(n+1)) - 2$.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2) Решения, в которых использовался общий вид функции, но без доказательств, а также корректно использующие этот общий вид, оценивались из 4 и 8 баллов за подпункты соответственно.
3) Полные решения оценивались в 8 и 17 баллов за подзадачи соответственно.

Задача 3.

Будем считать, что Шляпник за свой ход ставит крестики, а Заяц - нолики.
Без ограничения общности будем считать, что первыми ходят крестики и при этом они выбирают строки.
Давайте поймём, как выглядит конечная конфигурация поля. Для этого будем следить за тем, как располагаются нолики на поле.
Каждый ход коликов пересекает все предыдущие ходы крестиков. При этом клетки этих пересечений больше не могут быть перекрашены. Значит, что ноликов в конце не меньше трёх (1 клетка пересечения на первом ходу и 2 клетки на втором).
Можно показать, что коликов в итоге останется ровно три. Оставим это в качестве упражнения для участника.

У нас есть два нолика, которые лежат на полоске, соответствующей первому ходу и ещё один, в одном из столбцов этих ноликов, который лежит на полоске, соответствующей второму ходу крестиков.

Можно показать, что любая такая конфигурация достижима. С замечаниями выше это сделать не сложно, эту часть доказательства тоже оставим для участников.

Заметим, что итоговая конфигурация получится такой же, если первый игрок будет выбирать столбцы, а не строки.

Количество конфигураций можно посчитать следующим образом: нужно выбрать цвет второго игрока (двумя способами), затем выбрать одну клетку из 9, а потом выбрать по клетке в строке и столбце, которым принадлежит эта клетка. Количество способов при этом равно 2 * 9 * 2 * 2 = 72

Критерии оценивания:

1) Решения, которые рассматривали ли способы проведения процесса, а не его конечный результат, оценивались в 0 баллов.
2) Полные решения оценивались из 25 баллов.
3) За различные факты, которые могли способствовать продвижению в решении задачи, жюри могло добавлять баллы, даже в некорректных решениях.

Задача 4.

1. Заметим, что x_i образуют убывающую арифметическую прогрессию.
$x_0 - x_n = 2022$
$x_n = x_0 - n \cdot d \Rightarrow x_0 - x_0 + n \cdot d = 2022 \Rightarrow n \cdot d = 2022$
Воспользуемся формулой суммы первых $n + 1$ членов арифметической прогрессии:

$S_{n+1} = \frac{x_0+x_n}{2} \cdot (n+1)$. Тогда среднее арифметическое первых $n+1$ члена равняется $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{x_0+x_n}{2} = \frac{x_0+x_0-n\cdot d}{2} = x_o - \frac{n\cdot d}{2} = 34 \Rightarrow x_0 = 1045$.
Однако $x_0 - 2022 = x_n \Rightarrow x_n < 0$, а рост Алисы по условию задачи не может быть отрицательным. Отсюда получаем, что подходящих пар нет.

отрицательным. Отсюда получаем, что подходящих пар нет.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2) Решения вычисляющие тем или иным способом x_0, но не содержащие доказательство того, что подходящих пар нет, оценивались из 3 баллов.
3) Полное решение подпункта оценивалось в 5 баллов.
4) В большом количестве решений участников некорректно было указано количество членов арифметической прогрессии, жюри оценивало этот недочет в 1 балл, при условии, что он не оказывал влияние на дальнейшее решение.

2. Аналогично первому пункту получаем, что $x_0 = 2472$, при этом x_nполучается больше 0, значит подходящие пары могут быть. Заметим, что x_0вычисляется однозначно, значит все пары будут отличаться только числом d.
Аналогично первому пункту получаем, что $n \cdot d = 900$, учитывая что оба этих числа — целые положительные, получаем, что d должно быть делителем 900.
Так как среднее арифметическое первых $n+1$ арифметической прогрессии зависит только от первого члена, который не изменяется и $n \cdot d$, которое тоже постоянно по построению, то оно не изменится при изменении d
Осталось лишь подсчитать количество делителей числа $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$. Оно равно 3 (степень двойки + 1) * 3 (степень тройки + 1) * 3 (степень пятерки + 1) = 27.
3. В данном пункте нужно как и в предыдущих двух найти $x_0 = 2033702$, а также подсчитать количество делителей для $27000 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$, которое равно 64.

Критерии оценивания:

1) Решения вычисляющие тем или иным способом x_0, но не содержащие доказательство того, что подходящих пар нет, оценивались из 2 баллов.
2) Замечание о том, что все подходящие d являются делителями $x_n - x_0$ и только ими жюри оценивало из 7 баллов, распределенных по подпунктам 2 и 3.
3) Подсчет количества делителей $x_n - x_0$ жюри оценивало из 3 баллов и 4 баллов за подпункты 2 и 3соответственно.

9 класс

Задача 1

Возьмём p - простое число. Покрасим все розы, номера которых кратны p в белый цвет, а остальные - в красный. Проверим, что все условия выполняются.

1. Рассмотрим сумму номеров произвольных белых роз. Так как каждый из номеров делится на p, то и сумма в итоге будет делиться на p. По построению роза с таким номером белая, а значит это условие выполняется.
2. Рассмотрим произведение номеров двух красных роз. Так как ни один из множителей не делится на p, то и произведение не будет делиться на p. По построению роза с таким номером красная.

Понятно, что в саду при этом будет бесконечное количество и белых, и красных роз, строгое доказательство этого факта не требовалось.
Значит, такая раскраска нас устраивает.
Так как простых чисел бесконечное количество, то и раскрасок существует бесконечное количество.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное обоснования оценивались в 0 баллов.
2) Решения, в которых раскраска противоречила условиям оценивались в 0 баллов.
3) Полные решения оценивались из 25 баллов. Засчитывались и другие варианты решения.

Задача 2.

1. Заметим, что x_i образуют убывающую арифметическую прогрессию.
$x_0 - x_n = 2022$
$x_n = x_0 - n \cdot d \Rightarrow x_0 - x_0 + n \cdot d = 2022 \Rightarrow n \cdot d = 2022$
Воспользуемся формулой суммы первых $n+1$ членов арифметической прогрессии:
$S_{n+1} = \frac{x_0 + x_n}{2} \cdot (n+1)$. Тогда среднее арифметическое первых $n+1$ члена равняется $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{x_0 + x_n}{2} = \frac{x_0 + x_0 - n \cdot d}{2} = x_o - \frac{n \cdot d}{2} = 34 \Rightarrow x_0 = 1045$.
Однако $x_0 - 2022 = x_n \Rightarrow x_n < 0$, а рост Алисы по условию задачи не может быть отрицательным. Отсюда получаем, что подходящих пар нет.

Критерии оценивания:

1. Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2. Решения вычисляющие тем или иным способом x_0, но не содержащие доказательство того, что подходящих пар нет, оценивались из 3 баллов.
3. Полное решение подпункта оценивалось в 5 баллов.
4. В большом количестве решений участников некорректно было указано количество членов арифметической прогрессии, жюри оценивало этот недочет в 1 балл, при условии, что он не оказывал влияние на дальнейшее решение.

2. Аналогично первому пункту получаем, что $x_0 = 20338446$, при этом x_nполучается больше 0, значит подходящие пары могут быть. Заметим, что x_0вычисляется однозначно, значит все пары будут отличаться только числом d. Аналогично первому пункту получаем, что $n \cdot d = 232848$, учитывая что оба этих числа — целые положительные, получаем, что d должно быть делителем 232848.
Так как среднее арифметическое первых $n + 1$ арифметической прогрессии зависит только от первого члена, который не изменяется и $n \cdot d$, которое тоже постоянно по построению, то оно не изменится при изменении d.
Осталось лишь подсчитать количество делителей числа $232848 = 2^4 \times 3^3 \times 7^2 \times 11$. Оно равно 5 * 4 * 3 * 2 = 120.

Критерии оценивания:

1. Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2. Вычисление x_o жюри оценивало из 5 баллов.
3. Замечание о том, что все подходящие d являются делителями $x_n - x_0$ и только ими жюри оценивало из 7 баллов.
4. Подсчет количества делителей $x_n - x_0$ жюри оценивало из 8 баллов.
5. В большом количестве решений участников некорректно было указано количество членов арифметической прогрессии, жюри оценивало этот недочет в 1 балл, при условии, что он не оказывал влияние на дальнейшее решение.

Задача 3

Для начала определимся с тем, как работает наша функция $f(n)$.
Докажем следующее утверждение:
$f(4n) = 4n$
$f(4n + 1) = 1$
$f(4n + 2) = 4n + 3$
$f(4n + 3) = 0$

Доказывать будем индукцией по n.
База индукции уже присутствует в примерах в условии задачи, кроме $f(0) = 0$.

Шаг индукции. Пусть до некоторого $n = k$ наше утверждение выполнялось. Докажем, что оно будет также верно и для $n = k + 1$.

$f(4k + 4) = f(4k + 3) xor (4k + 4) = 0 xor (4k + 4) = 4k + 4$
$f(4(k + 1) + 1) = f(4k + 4) xor (4k + 5) = (4k + 4) xor (4k + 5) = 1$
Последнее равенство справедливо, так как два аргумента xor в данном случае отличаются в двоичной записи лишь в последней цифре, так как переполнения разряда при прибавлении 1 к чётному числу не происходит.

$f(4(k + 1) + 2) = f(4(k + 1) + 1) xor (4k + 6) = 1 xor (4k + 6) = 4k + 7$
Последнее равенство справедливо в силу четности второго аргумента.

$f(4(k+1)+3) = f(4(k+1)+2)xor(4k+7) = (4k+7)xor(4k+7) = 0$

Утверждение доказано.

Мы хотим найти стратегию игры для Белого Кролика.
Первым ходом Кролик может назвать $n = 4$. Тогда $y = 4x + 2$ будет давать остаток 2 по модулю 4, а значит $f(4x+2) = 4x + 3$.
Получив от Алисы значение $f(y)$, Кролик сможет найти искомое число следующим образом: $x = \frac{f(y)-3}{4}$

Критерии оценивания

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство формулы общего вида для $f(n)$ оценивалось из 12 баллов.
3) Стратегия Белого Кролика оценивалась из 12 баллов, несмотря на наличие или отсутствие доказательства общего вида $f(n)$.
4) Стратегии содержащие в себе два, три или четыре вопроса могли быть оценены жюри количеством баллов, не превосходящим 5.

Задача 4

Подзадача 1

Сформулируем задачу в графовых терминах: пусть вершинами будут гости, между двумя гостями будем проводить ребро, если они дружат. Таким образом, количество пар друзей будет равно количеству ребер в этом графе.

Докажем, что граф друзей является *хорошим*, если он не содержит циклов. Предположим, что в графе есть цикл, покажем, что тогда данный граф не является хорошим. Рассмотрим две вершины v_1 и v_2, такие, что они соединены ребром и лежат на цикле. Без ограничения общности, пусть v_1 рассказал v_2 загадку, заметим, что раз эти вершины лежат на цикле, то между ними существует два различных пути: гость v_2 не станет рассказывать загадку v_1, так как услышал ее от него, но расскажет следующему гостю на цикле и так далее, пока последний гость в цикле не расскажет эту загадку v_1 из-за чего он расстроится. Получается при наличии цикла — набор ребер не может быть *очень хорошим* ⇒ циклов нет.

Граф, который не содержащий циклов, по определению является, либо деревом, либо лесом, а также по доказанному выше является *хорошим* набором. Заметим также, что если мы соединим два дерева в лесу ребром, мы не создадим цикла, значит такой набор останется хорошим, мы можем продолжать этото процесс, пока все деревья не сольются в одно. Такое ребро всегда можно провести, потому что для каждого гостя его сосед, либо принадлежит тому же дереву, либо лежит в каком-то другом.

Получаем, что *очень хороший* набор является деревом на $2 \cdot n$ вершинах с ребрами, проведенными по правилам описанным в условии.
Осталось построить для произвольного n пример. Для этого можно воспользоваться утверждением выше про лес и считать, что каждый гость является деревом из одной вершины, постепенно сливая их добавлением ребра мы получим какое-то дерево, содержащее всех гостей ⇒ количество ребер в нем, а значит и количество пар друзей в *очень хорошем* наборе $2 \cdot n - 1$.

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство факта о том, количестве пар друзей в *очень хорошем* наборе оценивалось из 1 балла.
3) Пример построения такого набора для произвольного n оценивался из 1 балла.

Подзадача 2

Из первого пункта мы знаем, что очень хороший граф для $2 \cdot n$ гостей, содержит $2 \cdot n - 1$ ребро. Заметим, что граф гостей для $n = 2$ — это граф на четырех вершинах, где у каждого гостя есть возможность подружиться с каждым, значит всего вариантов провести ребро у нас $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 6$. Из них мы хотим выбрать $2 \cdot n - 1 = 3$ пары, которые подружатся, так как порядок выбора ребер не имеет значения — это можно сделать с помощью формулы сочетаний без повторений: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$. Однако не все наборы ребер нам подходят, некоторые из них образуют цикл длины 3. Заметим, что при этом одна из вершин остается изолированной, так как цикл содержит три ребра и не может содержать в себе количество вершин отличное от 3. Всего вариантов выбрать изолированную вершину — 4, по количеству вершин, значит мы учли 4 лишних графа. Получается всего 16 *очень хороших* наборов, так как все остальные варианты нам подходят, потому что образуют дерево. Доказательство этого утверждения оставим в качестве упражнения.

Критерии оценивания:

1. Численный ответ не содержащий никаких комментариев оценивался в 0 баллов.
2. Решения, перебирающие различные варианты графов оценивались в зависимости от точности и полноты перебора вплоть до полного балла за подпункт.
3. Переборные решения также требуют обоснования, почему каждый из перечисленных в ответе графов задает *очень хороший* набор и почему других таких наборов нет. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.
4. Комбинаторное решение описанное в разборе оценивалось в полный балл. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.

Подзадача 3

Введем дополнительную функцию $g(n)$, равную количеству графов на $2n$ вершинах, таких, что последние две вершины лежат в двух разных компонентах связности. При этом все остальные вершины также должны лежать в этих двух компонентах.

Давайте поймём, как связаны $g(n)$ и $f(n)$.

Для начала заметим, что $f(1) = 1$, $g(1) = 1$. В предыдущем пункте мы посчитали $f(2) = 16$.

Пусть у нас есть граф на $2n$ вершинах, который является деревом. Как он мог выглядеть до добавления последних двух вершин?
Либо без последних двух вершин он уже и был деревом, либо же, добавляя эти две вершины и некоторые рёбра, мы сделали его деревом. Иначе говоря:

$$f(n) = k * f(n-1) + m * g(n-1)$$

Найдём коэффициенты k и m.
Достаточно перебрать 32 варианта расположения ребер и проверить, что все нужные условия сохраняются. Разбор случаев с отсечениями оставим в качестве упражнения для участников.

Проделаем аналогичные рассуждения для коэффициентов в

$g(n) = l * f(n-1) + r * g(n-1)$

В результате получим:

$f(n) = 8 * f(n-1) + 8 * g(n-1)$
$g(n) = 4 * f(n-1) + 4 * g(n-1)$

Заметим, что $f(n) = 2 * g(n)$ при $n > 1$.

Тогда $f(n) = 8 * f(n-1) + 4 * f(n-1) = 12f(n-1)$ для $n > 2$.

Таким образом, $\mathrm{A} = 12, B = 0, C = 0, D = 0$. Формула в полном виде имеет смысл лишь для $n > 4$.

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Пояснения про количество переходов между различными состояниями оценивались из 5 баллов. В том числе, если были предложены какие-то другие вспомогательные объекты для подсчёта функции.
3) Решения, которые выводили коэффициенты исходя из первых двух значений функции, оценивались в 0 баллов.

Подзадача 4

$f(8) = 12^4 \times f(2) = 2^{12} \times 3^4 \equiv 96 \times 81 \equiv 76 (mod 100)$

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований или доказательств оценивались в 0 баллов.

10 класс

Задача 1

Подзадача 1

Заметим, что x_i образуют убывающую арифметическую прогрессию.
$x_0 - x_n = 2022$
$x_n = x_0 - n \cdot d \Rightarrow x_0 - x_0 + n \cdot d = 2022 \Rightarrow n \cdot d = 2022$
Воспользуемся формулой суммы первых $n+1$ членов арифметической прогрессии:
$S_{n+1} = \frac{x_0+x_n}{2} \cdot (n+1)$. Тогда среднее арифметическое первых $n+1$ члена равняется $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{x_0+x_n}{2} = \frac{x_0+x_0-n \cdot d}{2} = x_o - \frac{n \cdot d}{2} = 34 \Rightarrow x_0 = 1045$.
Однако $x_0 - 2022 = x_n \Rightarrow x_n < 0$, а рост Алисы по условию задачи не может быть отрицательным. Отсюда получаем, что подходящих пар нет.
Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2) Решения вычисляющие тем или иным способом x_0, но не содержащие доказательство того, что подходящих пар нет, оценивались из 3 баллов.
3) Полное решение подпункта оценивалось в 5 баллов.
4) В большом количестве решений участников некорректно было указано количество членов арифметической прогрессии, жюри оценивало этот недочет в 1 балл, при условии, что он не оказывал влияние на дальнейшее решение.

Подзадача 2

Аналогично первому пункту получаем, что $x_0 = 20338446$, при этом x_nполучается больше 0, значит подходящие пары могут быть. Заметим, что x_0вычисляется однозначно, значит все пары будут отличаться только числом d.
Аналогично первому пункту получаем, что $n \cdot d = 232848$, учитывая что оба этих числа — целые положительные, получаем, что d должно быть делителем 232848.
Так как среднее арифметическое первых $n+1$ арифметической прогрессии зависит только от первого члена, который не изменяется и $n \cdot d$, которое тоже постоянно по построению, то оно не изменится при изменении d. Отсюда получаем, что любой делитель подходит.
Осталось лишь подсчитать количество делителей числа $232848 = 2^4 \times 3^3 \times 7^2 \times 11$. Оно равно 5 * 4 * 3 * 2 = 120. Данная формула справедлива из комбинаторных соображений, так как любой делитель x можно представить как подмножество всех простых делителей x. Тогда если x содержит простой делитель p в некоторой степени α, есть $\alpha + 1$ способ учесть его ($p, p^2, \cdots, p^\alpha$ и p^0), и так для каждого простого делителя x независимо, применяя правило умножения получаем описанную выше формулу в общем виде.
Критерии оценивания:

1. Решения содержащие только ответ или некорректное доказательство оценивались в 0 баллов.
2. Вычисление x_o жюри оценивало из 5 баллов.
3. Замечание о том, что все подходящие d являются делителями $x_n - x_0$ и только ими жюри оценивало из 7 баллов.
4. Подсчет количества делителей $x_n - x_0$ жюри оценивало из 8 баллов.
5. В большом количестве решений участников некорректно было указано количество членов арифметической прогрессии, жюри оценивало этот недочет в 1 балл, при условии, что он не оказывал влияние на дальнейшее решение.

Задача 2

Для начала определимся с тем, как работает наша функция $f(n)$.
Докажем следующее утверждение:
$f(4n) = 4n$
$f(4n + 1) = 1$
$f(4n + 2) = 4n + 3$
$f(4n + 3) = 0$

Доказывать будем индукцией по n.
База индукции уже присутствует в примерах в условии задачи, кроме $f(0) = 0$.

Шаг индукции. Пусть до некоторого $n = k$ наше утверждение выполнялось. Докажем, что оно будет также верно и для $n = k + 1$.

$f(4k + 4) = f(4k + 3)xor(4k + 4) = 0xor(4k + 4) = 4k + 4$
$f(4(k + 1) + 1) = f(4k + 4)xor(4k + 5) = (4k + 4)xor(4k + 5) = 1$
Последнее равенство справедливо, так как два аргумента xor в данном случае отличаются в двоичной записи лишь в последней цифре, так как переполнения разряда при прибавлении 1 к чётному числу не происходит.

$f(4(k + 1) + 2) = f(4(k + 1) + 1)xor(4k + 6) = 1xor(4k + 6) = 4k + 7$
Последнее равенство справедливо в силу четности второго аргумента.

$f(4(k + 1) + 3) = f(4(k + 1) + 2)xor(4k + 7) = (4k + 7)xor(4k + 7) = 0$

Утверждение доказано.

Перейдем теперь к стратегии Белого Кролика. Заметим, что при $n = 2$: $y = 4 \cdot x + 2022 \cdot 2 + 2018 = 4 \cdot x + 6062$, что по модулю 4 сравнимо с 2, так как $4 \cdot x \equiv 0(mod4)$, $6062 \equiv 2(mod4)$ и остатки по одному и тому же модулю можно складывать $\Rightarrow y \equiv 2(mod4)$ вне зависимости от загаданного Алисой числа.

Отсюда получаем, что при $n = 2$ значение $f(4x + 6062) = 4x + 6063$, исходя из доказанного ранее общего вида $f(n)$, отсюда получаем, что кролик может выразить$x = \frac{f(4x+6062)-6063}{4}$. Получили стратегию, содержащую один вопрос. За 0 вопросов число не узнать, значит данная стратегия подходит Белому Кролику.

Критерии оценивания

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство формулы общего вида для $f(n)$ оценивалось из 12 баллов.
3) Стратегия Белого Кролика оценивалась из 12 баллов, несмотря на наличие или отсутствие доказательства общего вида $f(n)$.
4) Стратегии содержащие в себе два, три или четыре вопроса могли быть оценены жюри количеством баллов, не превосходящим 5.

Задача 3

Подзадача 1

Сформулируем задачу в графовых терминах: пусть вершинами будут гости, между двумя гостями будем проводить ребро, если они дружат. Таким образом, количество пар друзей будет равно количеству ребер в этом графе.

Докажем, что граф друзей является *хорошим*, если он не содержит циклов. Предположим, что в графе есть цикл, покажем, что тогда данный граф не является хорошим. Рассмотрим две вершины v_1 и v_2, такие, что они соединены ребром и лежат на цикле. Без ограничения общности, пусть v_1 рассказал v_2 загадку, заметим, что раз эти вершины лежат на цикле, то между ними существует два различных пути: гость v_2 не станет рассказывать загадку v_1, так как услышал ее от него, но расскажет следующему гостю на цикле и так далее, пока последний гость в цикле не расскажет эту загадку v_1 из-за чего он расстроится. Получается при наличии цикла — набор ребер не может быть *очень хорошим* ⇒ циклов нет.
Граф, который не содержащий циклов, по определению является, либо деревом, либо лесом, а также по доказанному выше является *хорошим* набором. Заметим также, что если мы соединим два дерева в лесу ребром, мы не создадим цикла, значит такой набор останется хорошим, мы можем продолжать этото процесс, пока все деревья не сольются в одно. Такое ребро всегда можно провести, потому что для каждого гостя его сосед, либо принадлежит тому же дереву, либо лежит в каком-то другом.
Получаем, что *очень хороший* набор является деревом на $2 \cdot n$ вершинах с ребрами, проведенными по правилам описанным в условии.
Осталось построить для произвольного n пример. Для этого можно воспользоваться утверждением выше про лес и считать, что каждый гость является деревом из одной вершины, постепенно сливая их добавлением ребра мы получим какое-то дерево, содержащее всех гостей ⇒ количество ребер в нем, а значит и количество пар друзей в *очень хорошем* наборе $2 \cdot n - 1$.
Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство факта о том, количестве пар друзей в *очень хорошем* наборе оценивалось из 1 балла.
3) Пример построения такого набора для произвольного n оценивался из 1 балла.

Подзадача 2

Из первого пункта мы знаем, что очень хороший граф для $2 \cdot n$ гостей, содержит $2 \cdot n - 1$ ребро. Заметим, что граф гостей для $n = 2$ — это граф на четырех вершинах, где у каждого гостя есть возможность подружиться с каждым, значит всего вариантов провести ребро у нас $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 6$. Из них мы хотим выбрать $2 \cdot n - 1 = 3$ пары, которые подружатся, так как порядок выбора ребер не имеет значения — это можно сделать с помощью формулы сочетаний без повторений: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$. Однако не все наборы ребер нам подходят, некоторые из них образуют цикл длины 3. Заметим, что при этом одна из вершин остается изолированной, так как цикл содержит три ребра и не может содержать в себе количество вершин отличное от 3. Всего вариантов выбрать изолированную вершину — 4, по количеству вершин, значит мы учли 4 лишних графа. Получается всего 16 *очень хороших* наборов, так как все остальные варианты нам подходят, потому что образуют дерево. Доказательство этого утверждения оставим в качестве упражнения.

Критерии оценивания:

1. Численный ответ не содержащий никаких комментариев оценивался в 0 баллов.
2. Решения, перебирающие различные варианты графов оценивались в зависимости от точности и полноты перебора вплоть до полного балла за подпункт.
3. Переборные решения также требуют обоснования, почему каждый из перечисленных в ответе графов задает *очень хороший* набор и почему других таких наборов нет. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.
4. Комбинаторное решение описанное в разборе оценивалось в полный балл. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.

Подзадача 3

Введем дополнительную функцию $g(n)$, равную количеству графов на $2n$ вершинах, таких, что последние две вершины лежат в двух разных компонентах связности. При этом все остальные вершины также должны лежать в этих двух компонентах.

Давайте поймём, как связаны $g(n)$ и $f(n)$.

Для начала заметим, что $f(1) = 1$, $g(1) = 1$. В предыдущем пункте мы посчитали $f(2) = 16$.

Пусть у нас есть граф на $2n$ вершинах, который является деревом. Как он мог выглядеть до добавления последних двух вершин?
Либо без последних двух вершин он уже и был деревом, либо же, добавляя эти две вершины и некоторые рёбра, мы сделали его деревом. Иначе говоря:

$$f(n) = k * f(n-1) + m * g(n-1)$$

Найдём коэффициенты k и m.
Достаточно перебрать 32 варианта расположения ребер и проверить, что все нужные условия сохраняются. Разбор случаев с отсечениями оставим в качестве упражнения для участников.

Проделаем аналогичные рассуждения для коэффициентов в

$g(n) = l * f(n-1) + r * g(n-1)$

В результате получим:

$f(n) = 8 * f(n-1) + 8 * g(n-1)$
$g(n) = 4 * f(n-1) + 4 * g(n-1)$

Заметим, что $f(n) = 2 * g(n)$ при $n > 1$.

Тогда $f(n) = 8 * f(n-1) + 4 * f(n-1) = 12f(n-1)$ для $n > 2$.

Таким образом, $\mathrm{A} = 12, B = 0, C = 0, D = 0$. Формула в полном виде имеет смысл лишь для $n > 4$.

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Пояснения про количество переходов между различными состояниями оценивались из 5 баллов. В том числе, если были предложены какие-то другие вспомогательные объекты для подсчёта функции.
3) Решения, которые выводили коэффициенты исходя из первых двух значений функции, оценивались в 0 баллов.

Подзадача 4

$f(8) = 12^6 \times f(2) = 2^{16} \times 3^6 \equiv 536 \times 729 \equiv 744 (mod 1000)$

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований или доказательств оценивались в 0 баллов.

Задача 4

Для начала Алисе следует обойти все города, чтобы для каждого города знать, в какие города из него идут дороги. Без ограничения общности будем считать, что города пронумерованы целыми числами от 1 до k.

Это можно сделать следующим образом:

1. Пусть множество $Used$ – посещенные Алисой города. Изначально оно пустое.
2. Пусть $G[v]$ – множество вершин, которые смежны с вершиной v. Изначально все такие множества пустые.
3. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$
    a. Добавляем $current$ в $Used$
    b. Заполняем $G[current]$
    c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.

i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$

4. Запустим обход в глубину из начальной вершины.

Таким образом мы обойдём всю компоненту связности, а значит заполним G для всех вершин. Доказательство этого факта оставим в качестве упражнения для участников.

Давайте рассмотрим G.
Если существует такая вершина V, что $G[V]$ имеет размер 1, то это означает, что в графе есть вершина степени 1. Заметим, что такое может быть лишь в случае, если в изначальном графе столица имела степень 1. Действительно, в противном случае, вершина степени 1 изначального графа после преобразования стала бы вершиной степени 2. Значит, в этом случае мы нашли столицы. Если есть одна вершина степени 1, то значит есть и её образ в другой части королевства.

Рассмотрим случай, когда в графе все вершины имеют степень 2. Поскольку наш граф связный, то это означает, что граф представляет из себя цикл длины k.
В этом случае в исходных половинах графа было по 2 листа. Очевидно, что в качестве кандидата на столицы подходит любая пара вершин, кратчайшее расстояние между которыми равно $k/2$.
Опишем, как для конкретной вершины найти её пару. После этого достаточно проделать эту процедуру для всех вершин.

1. Пусть мы находимся в вершине V
2. Положим $Used$ - пустое множество.
3. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$ и количества шагов c
   a. Если $c = k/2$, то возвращаем вершину $current$.
   b. Добавляем $current$ в $Used$
   c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.
      i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$ и количеством шагов $c + 1$ и вернем значение из него.
4. Запустим обход в глубину из V и количеством шагов равным 0.

Обоснование корректности мы оставим для участников.
Теперь рассмотрим случай, когда в графе нет вершины степени 1 и не все вершины имеют степень 2.
Для начала заметим, что если рассматривать изначальные деревья без выделения столиц, то итоговый граф не меняется, если столица находится в произвольной вершине, отличной от листа.

Выберем произвольную вершину, степень которой больше 2. Обозначим её как T.
Очевидно, что в изначальном графе такая вершина не могла быть листом, а значит это потенциальная столица.

Очевидно, что любой простой цикл в таком графе пересекает обе части графа. Более того, любой цикл на самом деле симметричен относительно листьев. Действительно, циклы могли образоваться только в результате применения объединения графов, то есть они обязательно проходят через пару листьев. Так как в каждой из частей графа существовал единственный простой путь между любой парой вершин, то в силу симметричности графов, этот путь совпадал в двух частях с точки зрения симметрии.

Это означает, что любой цикл, который содержит T, содержит также и её образ S в другой части графа.

Запустим поиск в глубину из вершины T:

1. Положим $Used$ - пустое множество, $path$– пустой список, $cycle$ - пустой список
2. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$
    a. Добавляем $current$ в $Used$
    b. Добавляем $current$ в конец $path$
    c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.
        i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$
        ii. Если $next = current$, то присвоим копию $path$ в $cycle$.
    d. Удалим последнюю вершину из $path$
5. Запустим обход в глубину из T.

В результате работы данного алгоритма мы найдем какой-то цикл, который проходит через S и T.

Запустим ещё один обход в глубину и найдём путь из T до любой из вершин, принадлежащих циклу, который не проходит по рёбрам этого цикла.

Несложно заметить, что такой путь найдётся. Для доказательства этого факта достаточно вспомнить о том, что степень вершины T больше 2, то есть после удаления из графа всех рёбер, которые принадлежат циклу, из T будет исходить ребро. Для удобства и без потери общности можно считать, что T - это корень изначального дерева, тогда такое ребро ведет в поддерево, которое не могло быть затронуто удалением цикла, а значит существует симметричное ему поддерево во второй части графа, которое тоже не затронуто циклом.

Также заметим, что такой путь всегда придёт в вершину S. Действительно, это следует из замечания про поддерево. Наш путь сразу же попадает в поддерево, которое не имеет пересечений по рёбрам и вершинам с исходным циклом. Значит, чтобы дойти до вершины, принадлежащей циклу, мы выйдем из поддерева и его симметричного образа. Сделать это можно единственным способом – перейти по ребру в вершину S.

Значит мы нашли пару вершин, которые могут быть столицами. В силу замечания о том, что граф не меняется от выбора столиц, мы можем найти множество листьев. Действительно, теперь нам достаточно посчитать расстояние от каждой из вершин S и T до всех вершин, а затем выделить множество вершин, которые будут на одинаковом расстоянии от S и T. Такое множество - это листья исходного графа, участникам предлагается самостоятельно доказать этот факт.

Для того, чтобы посчитать расстояния от одной вершины до всех других воспользуемся классическим вариантом поиска в ширину. Это известный алгоритм, описание которого мы здесь не приводим в целях уменьшения размеров разбора.

Теперь же нам осталось найти пары столиц среди всех остальных вершин, которые отличны от множества листьев, а также от S и T.

Для решения задачи можно было сослаться на уже описанный выше способ с единственным отличием в том, как мы будем обрабатывать вершины степени 2. Для них мы также находим цикл, далее запоминаем, сколько шагов по циклу нам необходимо сделать, чтобы дойти до первого пересечения цикла с листом, а затем делаем ещё столько же шагов. Это можно сделать тем же самым обходом в глубину. Нетрудно показать, что найденная таким образом вершина является образом исходной.

Критерии оценивания:

1. Разбор частного случая про граф, содержащий вершину степени 1 оценивался в 1 балл.
2. Геометрические решения, опирающиеся на поиск оси симметрии, но не поясняющие как ее искать в общем случае, оценивались в 0 баллов.

11 класс

Задача 1

Возьмём p - простое число. Покрасим все розы, номера которых кратны p в белый цвет, а остальные - в красный. Проверим, что все условия выполняются.

1. Рассмотрим сумму номеров произвольных белых роз. Так как каждый из номеров делится на p, то и сумма в итоге будет делиться на p. По построению роза с таким номером белая, а значит это условие выполняется.
2. Рассмотрим произведение номеров двух красных роз. Так как ни один из множителей не делится на p, то и произведение не будет делиться на p. По построению роза с таким номером красная.

Понятно, что в саду при этом будет бесконечное количество и белых, и красных роз, строгое доказательство этого факта не требовалось.
Значит, такая раскраска нас устраивает.
Так как простых чисел бесконечное количество, то и раскрасок существует бесконечное количество.

Критерии оценивания:

1) Решения содержащие только ответ или некорректное обоснования оценивались в 0 баллов.
2) Решения, в которых раскраска противоречила условиям оценивались в 0 баллов.
3) Полные решения оценивались из 25 баллов. Засчитывались и другие корректные варианты решения.

Задача 2

Подзадача 1

Для начала определимся с тем, как работает наша функция $f(n)$.
Докажем следующее утверждение:
$f(4n) = 4n$
$f(4n + 1) = 1$
$f(4n + 2) = 4n + 3$
$f(4n + 3) = 0$

Доказывать будем индукцией по n.
База индукции уже присутствует в примерах в условии задачи, кроме $f(0) = 0$.

Шаг индукции. Пусть до некоторого $n = k$ наше утверждение выполнялось. Докажем, что оно будет также верно и для $n = k + 1$.

$f(4k + 4) = f(4k + 3) xor (4k + 4) = 0 xor (4k + 4) = 4k + 4$
$f(4(k + 1) + 1) = f(4k + 4) xor (4k + 5) = (4k + 4) xor (4k + 5) = 1$
Последнее равенство справедливо, так как два аргумента xor в данном случае отличаются в двоичной записи лишь в последней цифре, так как переполнения разряда при прибавлении 1 к чётному числу не происходит.

$f(4(k+1)+2) = f(4(k+1)+1)xor(4k+6) = 1xor(4k+6) = 4k+7$
Последнее равенство справедливо в силу четности второго аргумента.

$f(4(k+1)+3) = f(4(k+1)+2)xor(4k+7) = (4k+7)xor(4k+7) = 0$

Утверждение доказано.

Перейдем теперь к стратегии Белого Кролика. Заметим, что при $n = 2$: $y = 4 \cdot x + 2022 \cdot 2 + 2022 = 4 \cdot x + 6062$, что по модулю 4 сравнимо с 2, так как $4 \cdot x \equiv 0(mod4)$, $6062 \equiv 2(mod4)$ и остатки по одному и тому же модулю можно складывать $\Rightarrow y \equiv 2(mod4)$ вне зависимости от загаданного Алисой числа.

Отсюда получаем, что при $n = 2$ значение $f(4x+6062) = 4x+6063$, исходя из доказанного ранее общего вида $f(n)$, отсюда получаем, что кролик может выразить $x = \frac{f(4x+6062)-6063}{4}$. Получили стратегию, содержащую один вопрос. За 0 вопросов число не узнать, значит данная стратегия подходит Белому Кролику.

Критерии оценивания

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство формулы общего вида для $f(n)$ оценивалось из 6 баллов.
3) Стратегия Белого Кролика оценивалась из 4 баллов, несмотря на наличие или отсутствие доказательства общего вида $f(n)$.
4) Стратегии содержащие в себе два, три или четыре вопроса могли быть оценены жюри количеством баллов, не превосходящим 3.

Подзадача 2

Рассмотрим два варианта: C чётное и C нечётное.
В первом случае стратегия для Белого Кролика будет заключаться в том, чтобы назвать $n = 4$.
Тогда $y = 16 \cdot x + B \cdot 4 + \mathrm{C}$ по модулю 4 сравнимо с 0 или 2. В случае с двойкой алгоритм нахождения x будет такой же, как в описанном выше пункте. В случае с 0 имеем: $f(y) = y$, то есть $x = \frac{f(y)-4B-C}{16}$.
Если же C нечётное, то давайте рассмотрим какие выражения у нас получатся в зависимости от остатка n по модулю 4.

1) $n = 4k$: $y = 16k^2x + 4kB + C \equiv C(mod4)$
2) $n = 4k+1$: $y =$
3) $n = 4k+2$: $y =$
4) $n = 4k+1$: $y =$

Заметим, что в 1 и 3 случаях мы получим нечётный y, а значит никакой информации об аргументе функции мы не получим.
Во втором и четвёртом случаях мы получаем значения одинаковой чётности. При фиксированных B и C существует такой x, при котором значения y в обоих случаях будут нечётны, а значит мы не сможем отгадать этот x.

Итого имеем, что при чётных C мы можем угадать число за 1 ход, а в остальных случаях у нас не существует стратегии.

Критерии оценивания

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Описание стратегии для чётного C с обоснованиями оценивалось из 5 баллов.
3) Доказательство того факта, что при нечётном C не существует стратегии оценивалось из 10 баллов.
4) Жюри могло снимать баллы за различные недочёты в решении участников.

Задача 3

Подзадача 1

Сформулируем задачу в графовых терминах: пусть вершинами будут гости, между двумя гостями будем проводить ребро, если они дружат. Таким образом, количество пар друзей будет равно количеству ребер в этом графе.

Докажем, что граф друзей является *хорошим*, если он не содержит циклов. Предположим, что в графе есть цикл, покажем, что тогда данный граф не является хорошим. Рассмотрим две вершины v_1 и v_2, такие, что они соединены ребром и лежат на цикле. Без ограничения общности, пусть v_1 рассказал v_2 загадку, заметим, что раз эти вершины лежат на цикле, то между ними существует два различных пути: гость v_2 не станет рассказывать загадку v_1, так как услышал ее от него, но расскажет следующему гостю на цикле и так далее, пока последний гость в цикле не расскажет эту загадку v_1 из-за чего он расстроится. Получается при наличии цикла — набор ребер не может быть *очень хорошим* ⇒ циклов нет.
Граф, который не содержащий циклов, по определению является, либо деревом, либо лесом, а также по доказанному выше является *хорошим* набором. Заметим также, что если мы соединим два дерева в лесу ребром, мы не создадим цикла, значит такой набор останется хорошим, мы можем продолжать этото процесс, пока все деревья не сольются в одно. Такое ребро всегда можно провести, потому что для каждого гостя его сосед, либо принадлежит тому же дереву, либо лежит в каком-то другом.
Получаем, что *очень хороший* набор является деревом на $2 \cdot n$ вершинах с ребрами, проведенными по правилам описанным в условии.
Осталось построить для произвольного n пример. Для этого можно воспользоваться утверждением выше про лес и считать, что каждый гость является деревом из одной вершины, постепенно сливая их добавлением ребра мы получим какое-то дерево, содержащее всех гостей ⇒ количество ребер в нем, а значит и количество пар друзей в *очень хорошем* наборе $2 \cdot n - 1$.
Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Доказательство факта о количестве пар друзей в *очень хорошем* наборе оценивалось из 1 балла.
3) Пример построения такого набора для произвольного n оценивался из 1 балла.

Подзадача 2

Из первого пункта мы знаем, что очень хороший граф для $2 \cdot n$ гостей, содержит $2 \cdot n - 1$ ребро. Заметим, что граф гостей для $n = 2$ — это граф на четырех вершинах, где у каждого гостя есть возможность подружиться с каждым, значит всего вариантов провести ребро у нас $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 6$. Из них мы хотим выбрать $2 \cdot n - 1 = 3$ пары, которые подружатся, так как порядок выбора ребер не имеет значения — это можно сделать с помощью формулы сочетаний без повторений: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$. Однако не все наборы ребер нам подходят, некоторые из них образуют цикл длины 3. Заметим, что при этом одна из вершин остается изолированной, так как цикл содержит три ребра и не может содержать в себе количество вершин отличное от 3. Всего вариантов выбрать изолированную вершину — 4, по количеству вершин, значит мы учли 4 лишних графа. Получается всего 16 *очень хороших* наборов, так как все остальные варианты нам подходят, потому что образуют дерево. Доказательство этого утверждения оставим в качестве упражнения.

Критерии оценивания:

1. Численный ответ не содержащий никаких комментариев оценивался в 0 баллов.
2. Решения, перебирающие различные варианты графов оценивались в зависимости от точности и полноты перебора вплоть до полного балла за подпункт.
3. Переборные решения также требуют обоснования, почему каждый из перечисленных в ответе графов задает *очень хороший* набор и почему других таких наборов нет. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.
4. Комбинаторное решение описанное в разборе оценивалось в полный балл. Недочеты в обосновани жюри штрафовало на свое усмотрение.

Подзадача 3

Введем дополнительную функцию $g(n)$, равную количеству графов на $2n$ вершинах, таких, что последние две вершины лежат в двух разных компонентах связности. При этом все остальные вершины также должны лежать в этих двух компонентах.

Давайте поймём, как связаны $g(n)$ и $f(n)$.

Для начала заметим, что $f(1) = 1$, $g(1) = 1$. В предыдущем пункте мы посчитали $f(2) = 16$.

Пусть у нас есть граф на $2n$ вершинах, который является деревом. Как он мог выглядеть до добавления последних двух вершин?
Либо без последних двух вершин он уже и был деревом, либо же, добавляя эти две вершины и некоторые рёбра, мы сделали его деревом. Иначе говоря:

$$f(n) = k * f(n-1) + m * g(n-1)$$

Найдём коэффициенты k и m.
Достаточно перебрать 32 варианта расположения ребер и проверить, что все нужные условия сохраняются. Разбор случаев с отсечениями оставим в качестве упражнения для участников.

Проделаем аналогичные рассуждения для коэффициентов в

$g(n) = l * f(n-1) + r * g(n-1)$

В результате получим:

$f(n) = 8 * f(n-1) + 8 * g(n-1)$
$g(n) = 4 * f(n-1) + 4 * g(n-1)$

Заметим, что $f(n) = 2 * g(n)$ при $n > 1$.

Тогда $f(n) = 8 * f(n-1) + 4 * f(n-1) = 12f(n-1)$ для $n > 2$.

Таким образом, $\mathrm{A} = 12, B = 0, C = 0, D = 0$. Формула в полном виде имеет смысл лишь для $n > 4$.

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований оценивались в 0 баллов.
2) Пояснения про количество переходов между различными состояниями оценивались из 5 баллов. В том числе, если были предложены какие-то другие вспомогательные объекты для подсчёта функции.
3) Решения, которые выводили коэффициенты исходя из первых двух значений функции, оценивались в 0 баллов.

Подзадача 4

$f(256) = 12^{254} \times f(2) = 12^{254} \times 3^{254} \times 16 \equiv 16^{64} \times 4 \times 9^{127} \equiv 6^{64} \times 4 \times$
$6^{64} \times 4 \times$

Критерии оценивания:

1) Решения, не содержащие каких-либо обоснований или доказательств оценивались в 0 баллов.

Задача 4

Для начала Алисе следует обойти все города, чтобы для каждого города знать, в какие города из него идут дороги. Без ограничения общности будем считать, что города пронумерованы целыми числами от 1 до k.

Это можно сделать следующим образом:

1. Пусть множество $Used$ – посещенные Алисой города. Изначально оно пустое.
2. Пусть $G[v]$ – множество вершин, которые смежны с вершиной v. Изначально все такие множества пустые.
3. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$
   a. Добавляем $current$ в $Used$
   b. Заполняем $G[current]$
   c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.

i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$

4. Запустим обход в глубину из начальной вершины.

Таким образом мы обойдём всю компоненту связности, а значит заполним G для всех вершин. Доказательство этого факта оставим в качестве упражнения для участников.

Давайте рассмотрим G.
Если существует такая вершина V, что $G[V]$ имеет размер 1, то это означает, что в графе есть вершина степени 1. Заметим, что такое может быть лишь в случае, если в изначальном графе столица имела степень 1. Действительно, в противном случае, вершина степени 1 изначального графа после преобразования стала бы вершиной степени 2. Значит, в этом случае мы нашли столицы. Если есть одна вершина степени 1, то значит есть и её образ в другой части королевства.

Рассмотрим случай, когда в графе все вершины имеют степень 2. Поскольку наш граф связный, то это означает, что граф представляет из себя цикл длины k.
В этом случае в исходных половинах графа было по 2 листа. Очевидно, что в качестве кандидата на столицы подходит любая пара вершин, кратчайшее расстояние между которыми равно $k/2$.
Опишем, как для конкретной вершины найти её пару. После этого достаточно проделать эту процедуру для всех вершин.

1. Пусть мы находимся в вершине V
2. Положим $Used$ - пустое множество.
3. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$ и количества шагов c
   a. Если $c = k/2$, то возвращаем вершину $current$.
   b. Добавляем $current$ в $Used$
   c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.
      i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$ и количеством шагов $c + 1$ и вернем значение из него.
4. Запустим обход в глубину из V и количеством шагов равным 0.

Обоснование корректности мы оставим для участников.
Теперь рассмотрим случай, когда в графе нет вершины степени 1 и не все вершины имеют степень 2.
Для начала заметим, что если рассматривать изначальные деревья без выделения столиц, то итоговый граф не меняется, если столица находится в произвольной вершине, отличной от листа.

Выберем произвольную вершину, степень которой больше 2. Обозначим её как T.
Очевидно, что в изначальном графе такая вершина не могла быть листом, а значит это потенциальная столица.

Очевидно, что любой простой цикл в таком графе пересекает обе части графа. Более того, любой цикл на самом деле симметричен относительно листьев. Действительно, циклы могли образоваться только в результате применения объединения графов, то есть они обязательно проходят через пару листьев. Так как в каждой из частей графа существовал единственный простой путь между любой парой вершин, то в силу симметричности графов, этот путь совпадал в двух частях с точки зрения симметрии.

Это означает, что любой цикл, который содержит T, содержит также и её образ S в другой части графа.

Запустим поиск в глубину из вершины T:

1. Положим $Used$ - пустое множество, $path$– пустой список, $cycle$ - пустой список
2. Определим способ обхода в глубину из вершины $current$
    a. Добавляем $current$ в $Used$
    b. Добавляем $current$ в конец $path$
    c. Рассматриваем в произвольном порядке вершины из $G[current]$. Пусть $next$ – текущая просматриваемая вершина.
        i. Если $next$ не лежит в $Used$, то рекурсивно запустим обход в глубину из вершины $next$
        ii. Если $next = current$, то присвоим копию $path$ в $cycle$.
    d. Удалим последнюю вершину из $path$
5. Запустим обход в глубину из T.

В результате работы данного алгоритма мы найдем какой-то цикл, который проходит через S и T.

Запустим ещё один обход в глубину и найдём путь из T до любой из вершин, принадлежащих циклу, который не проходит по рёбрам этого цикла.

Несложно заметить, что такой путь найдётся. Для доказательства этого факта достаточно вспомнить о том, что степень вершины T больше 2, то есть после удаления из графа всех рёбер, которые принадлежат циклу, из T будет исходить ребро. Для удобства и без потери общности можно считать, что T - это корень изначального дерева, тогда такое ребро ведет в поддерево, которое не могло быть затронуто удалением цикла, а значит существует симметричное ему поддерево во второй части графа, которое тоже не затронуто циклом.

Также заметим, что такой путь всегда придёт в вершину S. Действительно, это следует из замечания про поддерево. Наш путь сразу же попадает в поддерево, которое не имеет пересечений по рёбрам и вершинам с исходным циклом. Значит, чтобы дойти до вершины, принадлежащей циклу, мы выйдем из поддерева и его симметричного образа. Сделать это можно единственным способом – перейти по ребру в вершину S.

Значит мы нашли пару вершин, которые могут быть столицами. В силу замечания о том, что граф не меняется от выбора столиц, мы можем найти множество листьев. Действительно, теперь нам достаточно посчитать расстояние от каждой из вершин S и T до всех вершин, а затем выделить множество вершин, которые будут на одинаковом расстоянии от S и T. Такое множество - это листья исходного графа, участникам предлагается самостоятельно доказать этот факт.

Для того, чтобы посчитать расстояния от одной вершины до всех других воспользуемся классическим вариантом поиска в ширину. Это известный алгоритм, описание которого мы здесь не приводим в целях уменьшения размеров разбора.

Теперь же нам осталось найти пары столиц среди всех остальных вершин, которые отличны от множества листьев, а также от S и T.

Для решения задачи можно было сослаться на уже описанный выше способ с единственным отличием в том, как мы будем обрабатывать вершины степени 2. Для них мы также находим цикл, далее запоминаем, сколько шагов по циклу нам необходимо сделать, чтобы дойти до первого пересечения цикла с листом, а затем делаем ещё столько же шагов. Это можно сделать тем же самым обходом в глубину. Нетрудно показать, что найденная таким образом вершина является образом исходной.

Критерии оценивания:

1. Разбор частного случая про граф, содержащий вершину степени 1 оценивался в 1 балл.
2. Геометрические решения, опирающиеся на поиск оси симметрии, но не поясняющие как ее искать в общем случае, оценивались в 0 баллов.