8 класс

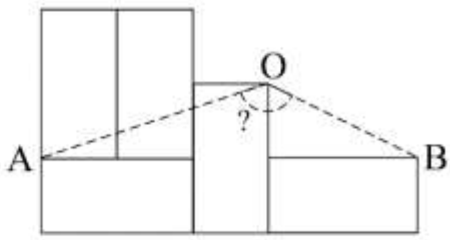
1. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 9 (каждое – по одному разу) в клетки таблицы 3×3 так, чтобы в каждой строке сумма чисел делилась нацело на 9 и в каждом столбце сумма чисел делилась нацело на 9? (20 баллов)

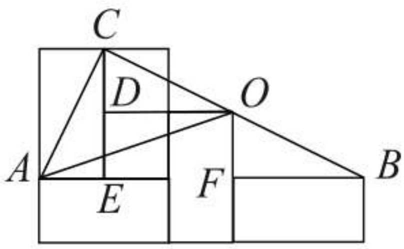
Решение: Да, например так:

1	3	5
8	4	6
9	2	7

Ответ: можно

2. На рисунке изображено 5 равных прямоугольников. Найдите угол AOB (в градусах). (20 баллов)

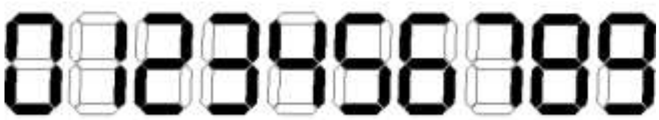




Решение: Из левой части рисунка несложно видеть, что одна из сторон прямоугольника в два раза больше другой, следовательно, при проведении через точку O прямой, параллельной BF, точка D поделит отрезок CE пополам. Поэтому $\Delta AEC = \Delta CDO = \Delta BFO$. Из равенства треугольников CDO и BFO получаем, что $\angle OBF = \angle COD$ при параллельных прямых OD и BF, а значит точки C, O, B лежат на одной прямой. Из равенства треугольников CDO и AEC следует, что $OC = AC$ и $\angle ACO = \angle ACE + \angle OCE = \angle ACE + \angle CAE = 90°$. Значит, треугольник ACO – прямоугольный равнобедренный, откуда $\angle AOC = 45°$ и $\angle AOB = 135°$.

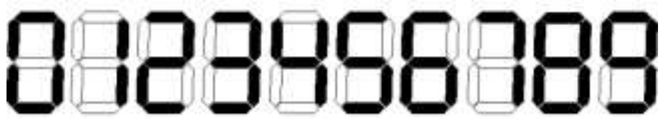
Ответ: $\mathbf{135°}$

3. Перед вами сегмент-цифры. Для отображения времени на электронных часах для каждой цифры используются семь сегментов, каждый из которых может быть подсвечен или нет; подсвеченные сегменты образуют цифру, как показано на рисунке



То есть для отображения нуля используется шесть сегментов, для единицы – два сегмента, и так далее. При этом на электронных часах отображаются лишь часы и минуты. Сколько минут в течение суток для отображения момента времени используется большее количество подсвеченных сегментов, чем через минуту? (Сутки начинаются в 00:00 и заканчиваются в 23:59) (20 баллов)

Решение: Выпишем количество сегментов, необходимых для отображения каждой цифры:



$$6 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 6$$

Рассмотрим несколько типов отображаемого времени:

1) Последняя цифра минут не равна 9. Тогда следующее отображаемое время отличается одной последней цифрой. Тогда чтобы сегментов стало меньше, последняя цифр минут в данный момент должны быть равна $0, 3, 6$ или 8. Всего в сутках такое время отображается $24 \cdot 6 \cdot 4 = 576$ минут.
2) Последняя цифра минут равна 9, но число минут не равно 59. Тогда в следующую минуту последняя цифра станет нулём и число фрагментов для её отображения не изменится, значит это число должно уменьшиться в десятках минут. То есть цифра десятков минут может быть равна только 0 и 3. Всего в сутках такое время отображается $24 \cdot 2 = 48$ минут.
3) Число минут равно 59, а число часов не оканчивается на 9. Тогда в следующую минуту число минут будет равно нулю, а значит число сегментов для отображения минут увеличится на 1. Поэтому число сегментов для отображения последней цифры часов должно уменьшиться хотя бы на 2, то есть последняя цифра часов может быть равна только 0 и 6. Всего в сутках такое время отображается 5 минут.
4) Число минут равно 59, а число часов оканчивается на 9. Тогда в следующую минуту будет отображаться одно из времён $10:00, 20:00$ – подходит только время $09:59$.

Итого всего в сутках подходящее время отображается $576 + 48 + 5 + 1 = 630$ минут.

Ответ: 630 минут

4. Маша выбрала натуральное число n и выписала на доску все натуральные числа от 1 до $6n$. Затем половину из этих чисел Маша уменьшила в два раза, треть чисел – уменьшила в три раза, а все оставшиеся числа – увеличила в шесть раз. Могла ли сумма всех полученных чисел совпасть с суммой исходных чисел? (20 баллов)

Решение: Да, такое могло произойти. Пусть $n = 2$, тогда сумма всех чисел от 1 до 12 равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78.$$

Пусть числа $2, 3, 5, 9, 10, 11$ Маша уменьшила в два раза, числа $4, 6, 8, 12$ – уменьшила в три раза, а числа $1, 7$ – увеличила в шесть раз. Тогда сумма полученных чисел будет равна

$$\frac{2+3+5+9+10+11}{2}+\frac{4+6+8+12}{3}+6(1+7)=78.$$

Ответ: могла

5. Двое играют в игру. На доске написано число 2022. За один ход требуется заменить имеющееся на доске число a на другое (отличное от a), полученное в результате одной их трёх операций:

1) Вычитание 3;
2) Вычитание из числа a остатка от деления числа $a-2$ на 7;
3) Вычитание из числа a остатка от деления числа $5a-1$ на 7.

Игрок, после хода которого впервые появилось отрицательное число, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника? (20 баллов)

Решение: Ничьи быть не может, так как по требованию задачи число должно изменяться после каждого хода, а значит с каждым ходом число на доске будет уменьшаться и когда-то станет отрицательным. Игрок, получивший число 2018 на своём ходу, либо имеет выигрышную стратегию, либо она есть у оппонента. Первый игрок может повлиять на то, кому достанется число 2018, а значит и у него есть выигрышная стратегия – докажем это.
Если первый игрок хочет, чтобы оппонент получил в начале своего хода число 2018 оппоненту, он делает второе действие: 2022 имеет остаток 6 при делении на 7, а значит число $a-2$ имеет остаток 4 при делении на 7, то есть в результате второго действия получится 2018.

Если первый игрок хочет сам начать ход с числа 2018, первым ходом он делает третье действие: 2022 имеет остаток 6 при делении на 7, а значит $5a-1\equiv_7 5\cdot 6-1=29\equiv_7 1$, то есть в результате третьего действия получится 2021. Число 2021 имеет остаток 5 при делении на 7, а значит при $a=2021$ имеют место сравнения $5a-1\equiv_7 a-2\equiv_7 3$, то есть при любом ходе второго получится 2018. Следовательно, выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Ответ: первый игрок

Критерии оценки

Задача 1

Верный пример	20 баллов
Неверный пример или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
При подсчёте угла выписана неверная теорема косинусов, в следствие чего косинус угла найден неверно с точностью до знака	12 баллов
Верное решение опирается на недоказанный факт принадлежности трёх точек одной прямой	12 баллов
Верный ответ, выраженный через тригонометрические функции, но не посчитанный в градусной мере	5 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении посчитан один лишний случай	18 баллов
При верном в целом решении потеряна одна минута подходящего времени	18 баллов
При верном в целом решении потерян случай с 9 минутами	15 баллов
При делении всего времени на группы, указанные в авторском решении, неверно посчитано количество подходящих минут в одной группе	15 баллов
Верно решена задача, в которой количество сегментов, используемое для отображения времени, меньше, чем через минуту	15 баллов
При делении всего времени на группы, указанные в авторском решении, верно посчитано количество времени в двух из них, а в двух других допущены логические ошибки при подсчёте	12 баллов
При подсчёте не учитывается число сегментов в часах, в следствие чего потеряны случаи с 59 минутами	10 баллов
Без обозначенного деления всего времени на группы, верно посчитаны две группы чисел, указанные в авторском решении	8 баллов
Без обозначенного деления всего времени на группы, посчитана одна группа чисел, указанная в авторском решении, или её существенная часть	5 баллов
При подсчёте чисел в группах допущена арифметическая ошибка	-2 балла за каждую
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 4

Верный пример того, что суммы могли совпасть, с указанием того, как именно нужно изменять числа	20 баллов
Неверные примеры совпадения сумм или доказательство того, что суммы не могли совпасть	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
При расстановке выигрышных и проигрышных позиций указана, но не доказана закономерность их расстановки	7 баллов
Доказано, что первый игрок всегда может сделать ход, чтобы получилось число с остатком 2 при делении на 7	7 баллов
Присутствует идея расстановки выигрышных и проигрышных позиций, однако сами позиции расставлены неверно	3 балла
Необоснованные или неверные стратегии за любого из игроков	0 баллов

9 класс

1. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждого листа, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 листа составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 листа – 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одного листа – целое число копеек? (20 баллов)

Решение: Переведём все стоимости в копейки. Пусть одна страница стоит x копеек, а обложка – $100y$ копеек. Тогда по условию задачи имеем

$$\begin{cases} 13300 < 100y + 104x \leq 13400, \\ 18000 < 100y + 192x \leq 18100. \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим $4600 < 88x < 4800$. Целочисленными решениями неравенства являются $x = 53$ и $x = 54$.

Если $x = 53$, то $7788 < 100y \leq 7888$ и $y = 78$. Но тогда $100y + 192x = 17976$, что противоречит второму неравенству.

Если $x = 54$, то $7684 < 100y \leq 7784$ и $y = 77$. Тогда $100y + 192x = 18068$.

Ответ: страница стоит 54 копейки, обложка стоит 77 рублей

2. Назовём натуральное число $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ *антиквадратом*, если $a_k \neq 0$ и число $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ является точным квадратом (к примеру, числа 94 и 441 являются антиквадратами, а числа 51 и 190 – нет). Докажите, что число $400 \dots 005$ (2023 нуля) нельзя представить в виде суммы двух антиквадратов. (20 баллов)

Решение: Допустим, данное число можно представить в виде суммы двух антиквадратов. Одно из них (назовём его a) не меньше половины указанного числа, то есть не меньше $200 \dots 003$ (2023 нуля). Квадраты не могут оканчиваться на цифры 2 и 3, а значит число a начинается на 4 и не меньше числа $400 \dots 001$. Второе число в таком случае однозначное и поэтому оно одновременно и антиквадрат, и квадрат, то есть может быть равно лишь 1 и 4. Если оно равно 1, то $a = 400 \dots 004$, а если оно равно 4, то $a = 400 \dots 001$. Оба этих числа не являются антиквадратами, так как числа $100 \dots 004 = (10^{1012})^2 + 4$ и $400 \dots 004 = (2 \cdot 10^{1012})^2 + 4$ не являются квадратами (разница с ближайшими квадратами слишком мала). Значит исходное число не представимо в виде требуемой суммы.

3. Максим придумал новый способ деления чисел на двузначное число N. Для того, чтобы поделить произвольное число A на число N, нужно сделать следующие действия:

1) Разделить A на сумму цифр числа N;

2) Разделить A на произведение цифр числа N;

3) Вычесть из первого результата второй.

Для каких чисел N способ Максима будет давать верный результат? (20 баллов)

Решение: Обозначим $N = \overline{xy} = 10x + y$, где x, y – цифры. Необходимо найти все пары (x, y) такие, что $\frac{A}{10x+y} = \frac{A}{x+y} - \frac{A}{xy}$, то есть $\frac{1}{10x+y} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{xy}$. Заметим, что $y \neq 0$. Преобразуем к виду

$$xy(x + y) = xy(10x + y) - (x + y)(10x + y)$$

$$(x + y)(10x + y) = xy \cdot 9x$$

$$10x^2 + 11xy + y^2 = 9yx^2$$

Решим уравнение как квадратное относительно x. Для это перепишем уравнение в виде

$$(10 - 9y)x^2 + 11yx + y^2 = 0$$

$$D = 121y^2 - 4y^2(10 - 9y) = 81y^2 + 36y^3 = 9y^2(9 + 4y)$$

Чтобы корень был целым, необходимо, чтобы дискриминант являлся точным квадратом, а значит и $9 + 4y$ – точный квадрат. Перебирая значения y от 1 до 9, подойдёт лишь $y = 4$. Тогда корнями уравнения являются числа $x_1 = \frac{-11\cdot4+3\cdot4\cdot5}{2\cdot(10-9\cdot4)} = -\frac{4}{13}$ и $x_2 = \frac{-11\cdot4-3\cdot4\cdot5}{2\cdot(10-9\cdot4)} = 2$. Подойдёт лишь $x = 2$, то $N = 24$. Для этого числа способ Максима даёт верный результат.

Ответ: 24

4. Квадрат размером 5×5 разбили на квадратики со стороной 1 и у каждого квадратика отметили его центр. Дима провёл четыре отрезка с концами в отмеченных точках так, что никакие два отрезка не пересекаются (даже по отмеченным центрам). Докажите, что после этого он всегда сможет провести пятый отрезок с концами в отмеченных точках так, чтоб он не пересекал никакой другой отрезок. (20 баллов)

Решение: Проведём четыре таких отрезка, удовлетворяющих условию задачи. Теперь по очереди будем продлевать отрезки (в любом порядке) пока они не пересекут границы квадрата или уже продлённые отрезки. Для удобства будем рассматривать не исходные отрезки, а полученные после продления. Точки пересечения всех отрезков и четыре вершины квадрата 5×5 будем называть *вершинами*, а их количество обозначим через В. Вершины делят каждый отрезок, а также стороны квадрата на несколько отрезков, которые мы будем называть *рёбрами*, а их количество обозначим через Р. Части плоскости, включая бесконечную часть, что вне квадрата, будем называть *гранями*, а их количество обозначим через Р. Полученная конструкция называется *плоским* графом, для которой справедлива формула Эйлера:

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2.$$

Если в процессе продления отрезков образовывалась новая вершина, то она поделила какое-то ребро на две части и добавилось также одно ребро. Если же новой вершины не было, то она и не разбила никакое ребро на части, а значит новых рёбер не добавилось. Получается, при любом расположении отрезков и любом способе их продления, величина $\text{В} - \text{Р}$ не меняется и равна, например, когда все отрезки были параллельны сторонам квадрата (см. рисунок 1).

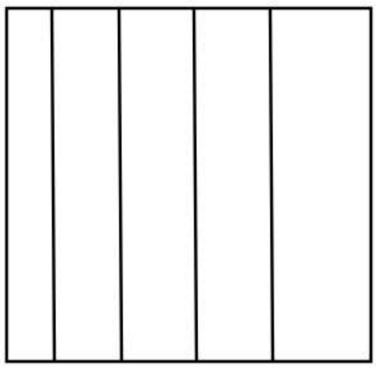


Рис.1. Пример продления отрезков

В этом случае $\text{В} = 12, \text{Р} = 16$. Но тогда по формуле Эйлера $\Gamma = 6$. Вычитая внешнюю часть квадрата, получается, что отрезки разбили квадрат на 5 частей. На каждом из четырёх отрезков лежит не более 5 отмеченных центров, значит не менее 5 точек лежит внутри граней. Если на каждом отрезке лежит ровно 5 точек, то все эти отрезки параллельны сторонам квадрата (например, горизонтальны). Но тогда осталась ещё одна горизонтальная прямая, не задетая другими отрезками. Соединяем пятым отрезком любые две точки с этой горизонтали. Если на отрезках суммарно лежит не более 19 точек, то хотя бы 6 точек лежат строго внутри граней. По принципу Дирихле найдётся грань, содержащая хотя бы две из неиспользованных точек. Каждая грань – выпуклый многоугольник, значит соединив те самые две точки отрезком, он будет лежать строго внутри грани.

5. Для всех натуральных n, больших единицы, докажите неравенство $\sin\left(\frac{30°}{n}\right) > \frac{1}{2n}$. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом $\frac{60°}{n}$ при вершине и длиной боковой стороны 1. Проведя высоту BH к основанию, получим $\sin\left(\frac{30°}{n}\right) = \frac{BH}{AB} = BH$, откуда $BC = 2\sin\left(\frac{30°}{n}\right)$.

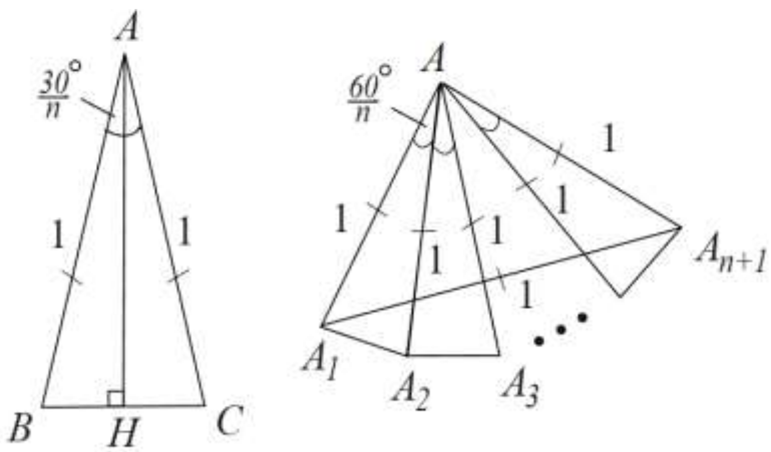


Рис.1. К задаче 9.5

Построим последовательно n таких треугольников с общей вершиной A (см. рисунок 1). При таком построении угол A_1AA_{n+1} будет равен $60°$, а следовательно, треугольник A_1AA_{n+1} – равносторонний и $A_1A_{n+1} = 1$. По неравенству многоугольника $A_1A_{n+1} \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_{n+1} = 2n \cdot \sin\left(\frac{30°}{n}\right)$, а значит $\sin\left(\frac{30°}{n}\right) \geq \frac{1}{2n}$. Равенство может возникнуть лишь в том случае, когда все точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ лежат на одной прямой, чего не может быть, так как $\angle AA_1A_2 \neq 60°$; отсюда следует строгий знак неравенства.

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что стоимость листа составляет либо 53, либо 54 копейки	17 баллов
Верно найдено значение разности округлённых стоимостей книг объёмом 104 и 192 листа. До ответа не доведено	12 баллов
Задача решена для случая, когда округление стоимости первой книги оказалось больше, чем округление стоимости второй	10 баллов
Составлена верная система уравнений	5 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Доказано, что один из антиквадратов - число из 2025 цифр, начинающееся на 4	7 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Рассмотрены всевозможные варианты числа N за исключением чисел вида $\overline{aa}$	12 баллов
Задача сведена к решению не более чем 9-ти квадратных уравнений, причём в решении это замечено автором	5 баллов
Приведён верный ответ и проверено, что он работает для всех чисел A	3 балла
Доказано, что число N обязано быть кратным 3	2 балла
Только ответ без проверки того, что он подходит	0 баллов
Неверное решение	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Верное решение, основанное на недоказанном факте, что при продлении четыре исходных отрезка поделят квадрат на 5 многоугольников	8 баллов
Неполный перебор случаев отрезков, проведённых Димой	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10 класс

1. На каждой странице книги написан её номер. Нумерация страниц начинается с единицы. Вася вырвал из книги все чётные по счёту листы (на каждом листе книги по две страницы). Номера оставшихся в книге страниц все вместе содержат ровно 845 цифр. Сколько страниц могло быть в книге изначально? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет. (20 баллов)

Решение: Среди каждых четырёх подряд идущих страниц остались две с номерами, имеющими остатки 1 и 2 при делении на 4. Остались страницы с однозначными номерами $1, 2, 5, 6, 9$, двузначными номерами $10, 13, 14, 17, \ldots, 97, 98$ и сколько-то трёхзначных номеров $101, 102, 105, 106, \ldots$. Среди первых 100 страниц осталось ровно половина, пять из которых – однозначные, а значит двузначных страниц осталось 45. На нумерацию оставшихся страниц до сотни потребовалось $5 + 45 \cdot 2 = 95$ цифр, значит на трёхзначные номера потребовалось 750 цифр, итого всего трёхзначных номеров осталось $750 : 3 = 250$. В каждой четвёрке номеров осталось ровно два трёхзначных номера, значит последние два оставшихся номера будут в 125 по счёту четвёрке – это номера $101 + 124 \times 4 = 597$ и $102 + 124 \times 4 = 598$. Следующие две страницы могли быть вырваны, и тогда всего страниц было 600, а могли быть не вырваны, и тогда страниц было 598.

Ответ: 598 и 600

2. На бумаге отметили 25 точек – центры клеток квадрата 5×5. Точки покрашены в несколько цветов. Известно, что ни на одной прямой (вертикальной, горизонтальной, или идущей под любым наклоном) нет трёх точек одинакового цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано? (20 баллов)

Решение: Если использовано не больше двух цветов, то, в частности, в первой строке найдутся хотя бы три точки одного цвета – они лежат на одной прямой. Пример использования трёх цветов (одинаковыми цифрами обозначены точки, покрашенные в один цвет):

1	2	2	3	3
2	3	1	3	2
3	3	2	1	2
1	1	3	2	3
2	2	3	1	1

Ответ: 3 цвета

3. Назовём натуральное число *особенным*, если в нём можно поменять одну цифру на другую так, чтобы в полученном числе все цифры были различными. Числа, в которых все цифры различны, тоже считаются особенными. Сколько существует особенных десятизначных чисел? (20 баллов)

Решение: Разобьём числа на группы:

1) Числа, в которых все цифры различны – всего их $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9 \cdot 9!$.
2) Числа, в которых совпадают две ненулевые цифры, не стоящие в старшем разряде. Всего таких цифр 9, пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8 \cdot 8!$ способами. Итого таких чисел $36 \cdot 8 \cdot 9!$.
3) Числа, в которых совпадают две нулевые цифры. Всего пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$ способами. Итого таких чисел $36 \cdot 9!$.

4) Числа, в которых совпадают две ненулевые цифры, и одна из них стоит в старшем разряде. Всего таких цифр 9, пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – 9, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$ способами. Итого таких чисел $81 \cdot 9!$.

Итого особенных чисел всего $(9 + 36 \cdot 8 + 36 + 81) \cdot 9! = 414 \cdot 9!$.

Ответ: $\mathbf{414 \cdot 9!}$

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ b^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ c^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d}, \\ d^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{cases}$$ (20 баллов)

Решение: Рассмотрим первые два уравнения системы и вычтем из первого второе:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$(a - b)\left(a + b - \frac{1}{ab}\right) = 0.$$

Получается, что если $a \neq b$, то $ab(a + b) = 1$. Аналогичные равенства можно записать для любых двух не равных друг другу чисел.

Предположим, что среди значений переменных a, b, c, d хотя бы три разных. Без ограничения общности, пусть $a \neq b \neq c$. Тогда

$$ab(a + b) = ac(a + c)$$

$$b^2 + ab = c^2 + ac$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0.$$

Так как $b \neq c$, получим $a + b + c = 0$. Подставим $-a = b + c$ в первое уравнение с учётом того, что $bc(b + c) = 1$:

$$a^2 = \frac{b + c}{bc} + \frac{1}{d} = (b + c)^2 + \frac{1}{d} = a^2 + \frac{1}{d},$$

что невозможно. Значит среди переменных не больше двух различных значений.

Рассмотрим несколько случаев:
1) $a = b = c = d$. Тогда $a^2 = \frac{3}{a}$, из чего $a = b = c = d = \sqrt[3]{3}$.

2) Какие-то три числа равны, а третье им не равно. Без ограничения общности, пусть $a = b = c \neq d$ (остальные случаи разбираются аналогично). Тогда система будет равносильна системе

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{d} \\ d^2 = \dfrac{3}{a} \end{cases}.$$

Выразив a из второго уравнения и подставив в условие $ad(a + d) = 1$, получим

$$\frac{3}{d}\left(\frac{3}{d^2} + d\right) = 1,$$

$$\frac{9}{d^3} = -2,$$

$$d = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}.$$

В таком случае $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Проверим, что полученная пара чисел удовлетворяет первому уравнению системы. Действительно,

$$\sqrt[3]{\frac{16}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1}.$$

Последнее равенство верно, значит $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, d = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ будет решением исходной системы.

3) Пара чисел принимает одно значение, а другая пара чисел – другое. Без ограничения общности, пусть $a = b, c = d$. Тогда исходная система будет равносильна системе

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{c} \\ c^2 = \dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{a} \end{cases}.$$

Так как $a \neq c$, имеем дополнительно условие $ac(a + c) = 1$. Первое уравнение запишем в виде $a^2 = \frac{c+2a}{ac} = (a + c)(2a + c) = 2a^2 + 3ac + c^2$, откуда $a^2 + 3ac + c^2 = 0$, $(a + c)^2 + ac = 0$, $\frac{1}{(ac)^2} = -ac$, $(ac)^3 = -1$, $ac = -1$, и значит $a + c = -1$. Заметим, что выполнив ту же подстановку во второе уравнение системы, мы получим те же условия на a и c. Если последние два условия выполняются, то $ac = a(-1 - a) = -1$, то есть $a^2 + a - 1 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ – один из них равен a, а другой равен c.

Ответ: $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$;
$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$;
$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5. Существует ли выпуклый многоугольник, не имеющий центра симметрии, который можно разрезать на два выпуклых многоугольника, каждый из которых имеет центр симметрии? (20 баллов)

Решение: Предположим, что такой многоугольник существует. Проведём некоторый разрез, делящий его на два выпуклых многоугольника. Если линия разреза не является отрезком, то на ней найдутся три точки A, B, C, образующие треугольник (см. рисунок 1). Оба многоугольника, в силу выпуклости,

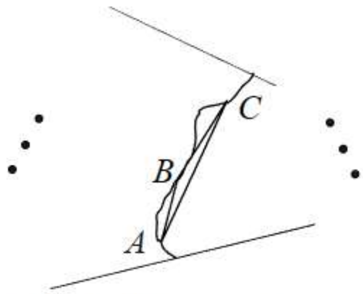


Рис.1. Пример разреза

содержат на своей границе вершины треугольника ABC, значит он целиком должен лежать в обоих многоугольниках, что невозможно, а следовательно, линия разреза может быть только отрезком. Пусть отрезок XY – линия разреза. Ясно, что точки X, Y лежат на сторонах исходного многоугольника. Пусть разрез делит многоугольник на два, центры симметрии которых обозначим через O_1, O_2 (см. рисунок 2). Отрезок XY является стороной обоих многоугольников и при симметрии переходит в

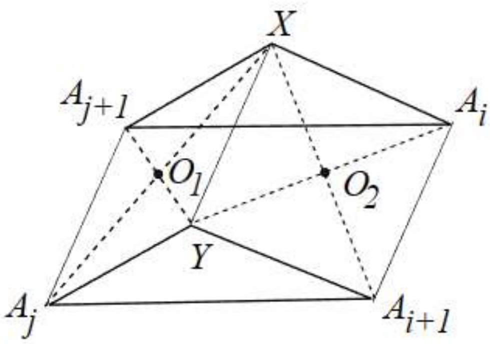


Рис.2. Разбиение многоугольника на две части

стороны исходного многоугольника – назовём их A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1}. Четырёхугольники $XA_iA_{i+1}Y$ и $YA_jA_{j+1}X$ – параллелограммы. Если точки A_i, X, A_{j+1} не лежат на одной прямой, то точки A_j, Y, A_{i+1} тоже не лежат на одной прямой, и тогда равны углы A_iXA_{j+1} и A_jYA_{i+1} в треугольниках A_iXA_{j+1} и A_jYA_{i+1}. Но тогда один из внутренних углов исходного многоугольника больше $180°$, что противоречит его выпуклости. Следовательно, точки A_i, X, A_{j+1} лежат на одной прямой, точки A_j, Y, A_{i+1} лежат на одной прямой, а также $A_iA_{i+1} = XY = A_jA_{j+1}$, то есть $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$ – параллелограмм.

Из построения разреза следует, что вершин исходного многоугольника вне параллелограмма в полуплоскости относительно прямой A_iA_{i+1}, отличной от той, что содержит отрезок XY, быть не может. Аналогично с прямой A_jA_{j+1}. Если помимо вершин $A_i, A_{i+1}, A_j, A_{j+1}$ есть ещё какая-то вершина исходного многоугольника внутри параллелограмма, то пусть, без ограничения общности, это вершина между A_{j+1} и A_i – назовём её A_k. А если есть ещё какая-то вершина вне параллелограмма, то пусть, без ограничения общности, это вершина между A_{i+1} и A_j – назовём её A_m (см. рисунок 3). Но в первом случае отрезок XA_i будет лежать вне многоугольника, а во втором – отрезок A_mA_{i+1} будет лежать вне многоугольника. Следовательно, исходный многоугольник является параллелограммом, что противоречит условию, так как у него есть центр симметрии.

Ответ: не существует

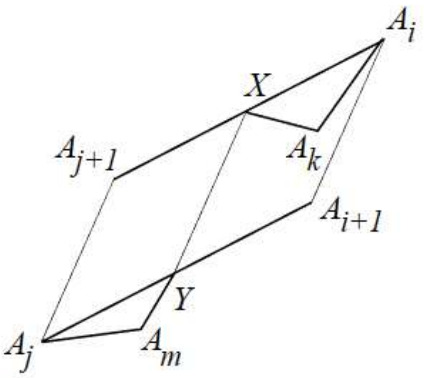


Рис.3. Разрез параллелограмма

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении допущена арифметическая при подсчете общего числа страниц	18 баллов
Верное рассуждение, но на последнем шаге вычтен не 1 лист, а 1 страница	18 баллов
При верном в целом решении допущена ошибка при подсчёте последней пары невырванных страниц, в следствие чего получены неверные на 1-2 листа ответы	18 баллов
При описании случая, когда последний лист вырван, не учтено, что номера 600 и 599 уходят из подсчёта одновременно	18 баллов
Верный ответ получен в листах, а не в страницах	15 баллов
При верном ходе решения неверно посчитано количество страниц с 1-100 (ошибка не арифметическая)	5 баллов
Рассмотрены два случая с чётным и нечётным количеством листов, но подсчёт не верен	3 балла
Верно подсчитано число цифр на оставшихся страницах с 1 по 100	2 балла
Потерян один из случаев (последний лист вырван)	- 5 баллов
При подсчете страниц, автор считает, что лист 99-100 не вырван	- 5 баллов
В следствие арифметической ошибки неверно подсчитано количество цифр в первой сотне оставшихся страниц или в первой сотне с трёхзначными номерами	-5 баллов
При верном ходе решения подсчёт страниц до 100 не приведён, при этом получен верный ответ	- 3 балла
При верном ходе решения подсчёт страниц не доведён до конца	- 3 балла
Участник путает понятия “цифра” и “число”	0 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Верный пример на 3 цвета с доказательством, что меньше нельзя	20 баллов
Только пример на 3 цвета без оценки	10 баллов
Верная оценка без примера	5 баллов
Пример на 4 и более цветов	0 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Верно подсчитано количество особенных чисел, в которых совпадают две ненулевые цифры	15 баллов
При верном в целом решении допущена логическая ошибка при подсчете количества особенных чисел, содержащих ровно один ноль	15 баллов
При верном в целом решении допущена логическая ошибка при подсчете количества особенных чисел, в которых совпадают первые две цифры	15 баллов
Ошибочно поделено на 2 количество особенных чисел, не содержащих нуля, в следствие чего получен неверный ответ. В остальном решение верное	15 баллов
Упущен случай подсчета особенных чисел, которые можно получить заменой нуля на первую цифру	12 баллов
Верный ход подсчёта количества особенных чисел, у которых совпадают две цифры не старшего разряда, но в нём допущена арифметическая ошибка	10 баллов
Верно найдено количество чисел, у которых все цифры различны и подсчитано количество остальных, получаемых заменой одной цифры; при этом не учтено, что некоторые особенные числа могут быть получены из двух разных	7 баллов
Верно подсчитано количество особенных чисел, в которых совпадают две нулевые цифры	5 баллов
Верно подсчитано количество «особенных» чисел, у которых одна из совпадающих цифр – последняя	2 балла
Подсчитано только количество десятизначных чисел с различными цифрами	0 баллов
Неверный ход подсчёта или отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Доказано, что среди чисел a, b, c, d есть хотя бы два равных	5 баллов
Разобран случай, когда $a = b = c = d$	3 балла
Арифметическая ошибка	-1 балл
При верном в целом решении получены неверные четверки корней $a = b$ и $c = d$ и симметричные им	-5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Верное решение опирается на необоснованный факт того, что разрез может быть только отрезков	15 баллов
Доказано, что разрез может быть только отрезком и что у исходного многоугольника стороны попарно параллельны	5 баллов
Дан только ответ	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

11 класс

1. Дарья Дмитриевна готовит зачёт по теории чисел. Она пообещала каждому студенту дать столько задач, сколько слагаемых он создаст в числовом примере

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2021,$$

где все числа a_i – натуральные, больше 10 и являются палиндромами (не меняются, если их цифры записать в обратном порядке). Если студент не нашёл ни одного такого примера, он получит на зачёте 2021 задачу. Какое наименьшее количество задач может получить студент? (20 баллов)

Решение: Одну задачу студент получить не может, так как 2021 не является палиндромом. Предположим, что он может получить две задачи, тогда хотя бы одно из чисел a_1, a_2 – четырёхзначное. Если оно начинается на 2, то вторая цифра 0 и само число равно 2002. В таком случае второе число равно 19, что не палиндром. Если же число начинается с 1, то его последняя цифра также 1 и у второго числа последняя цифра должна быть нулём, что неверно для палиндромов. Значит две задачи студент получить не мог. Пример на 3 задачи существует, например, $1111 + 888 + 22 = 2021$.

Ответ: 3

2. Существует ли многоугольник, не имеющий центра симметрии, который можно разрезать на два выпуклых многоугольника, каждый из которых имеет центр симметрии? (20 баллов)

Решение: Существует. Пример.

Центрами симметрии прямоугольников являются точки пересечения их диагоналей. Данный многоугольник не имеет центра симметрии, так как если он лежит вне синего отрезка, проходящего через середину одной из сторон, левые вершины многоугольника перейдут не в точки многоугольника, а если он лежит вне красного отрезка, проходящего через середину другой стороны, то верхние вершины многоугольника перейдут не в точки многоугольника.

Ответ: существует

3. Положительные числа a, b, c, d таковы, что числа a^2, b^2, c^2, d^2 в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию и числа $\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a = b = c = d$. (20 баллов)

Решение: Запишем характеристическое свойство для каждой арифметической прогрессии:

$$a^2+c^2=2b^2;\ (1)$$

$$b^2+d^2=2c^2;\ (2)$$

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}=\frac{2}{a+b+d}.\ (3)$$

Преобразуем уравнение (3):

$$(a+b+d)(a+c+d)+(a+b+c)(a+b+d)=2(a+b+c)(a+c+d);$$

$$2a^2+b^2+d^2+3ab+2ac+3ad+2bc+2bd+2cd$$
$$=2a^2+2c^2+2ab+4ac+2ad+2bc+2bd+2cd;$$

$$b^2+d^2+ab+ad=2c^2+2ac.$$

Воспользовавшись равенством (2), получим

$$ab+ad=2ac,$$

при этом $a>0$, значит $b+d=2c$. Подставим в равенство (2) и получим

$$b^2+d^2=2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2;$$

$$2(b^2+d^2)=b^2+2bd+d^2;$$

$$(b-d)^2=0,$$

из чего $b=d$. Но $2c=b+d=2b$, откуда $b=c=d$.

Подставим полученные равенства в уравнение (1):

$$a^2+b^2=2b^2,$$

из чего $a=b$, что и требовалось доказать.

4. Найдите количество троек натуральных чисел m,n,k, являющихся решением уравнения $m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$. (20 баллов)

Решение: Чтобы левая часть была целым числом, числа k и $n+\sqrt{k}$ должны быть точными квадратами, при этом $n+\sqrt{k}\geq 2$, значит $\sqrt{n+\sqrt{k}}\geq 2$ и отсюда $m\leq 2021$. Так как $1\leq m\leq 2021$, то $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ может принимать любое значение от 2 до 2022 – по этому значению число m определяется однозначно. Пусть $k=x^2$ и $n+\sqrt{k}=y^2$, где $1\leq x\leq y^2-1$ и $2\leq y\leq 2022$, тогда число n определяется однозначно, а именно $n=y^2-x$. Получается необходимо посчитать число допустимых пар (x, y). Всего их $(2^2-1)+\ldots+(2022^2-1)=1^2+2^2+\ldots+2022^2-2022$. Формула суммы квадратов первых n натуральных чисел известна:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Применим эту формулу и получим $1^2+2^2+\ldots+2022^2-2022=\frac{2022\cdot2023\cdot4045}{6}-2022=27575680773$.

Ответ: 27575680773

5. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя в каждую клетку таблицы 8×8 записывает число от 1 до 64, используя каждое по одному разу. После этого Вася выбирает одну из клеток и ставит на эту клетку ладью. Затем он выбирает вторую клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из первой клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Далее он выбирает третью клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из второй клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Выбирать ранее посещённые клетки запрещено. После этого Вася складывает все три числа, записанных в клетках, на которых стояла ладья. Какую максимальную сумму гарантированно может получить Вася не зависимо от того, каким способом Петя заполнит таблицу? (Ладья может перемещаться на любое количество клеток по горизонтали или вертикали) (20 баллов)

Решение: Докажем вспомогательную лемму.

Лемма: а) На доске 8×8 выбраны 11 произвольных клеток. Тогда среди них можно найти три клетки такие, что от одной их них можно двумя ходами ладьи обойти вторую и третью клетки.

б) На доске, суммарное числом столбцов и строк которой не более 11, выбраны 8 клеток. Тогда среди них можно найти три клетки такие, что от одной их них можно двумя ходами ладьи обойти вторую и третью клетки.

Доказательство леммы: Если в столбце/строке выбрана одна клетка, будем называть её одиночной, а если две – будем называть каждую из двух клеток парной. Будем говорить, что клетка занимает строку/столбец, если она стоит в этой строке/столбце. Заметим, что никакие другие клетки не могут быть выбраны в столбце/строке, где стоит одиночная или парная клетки. Тогда каждая пара клеток занимает суммарно 3 строки и столбца, а каждая одиночная – 1 строку и 1 столбец.

а) Обозначим число одиночных клеток за x, а число парных клеток – за $2y$. Если лемма не выполняется, то нельзя 11 клетками занять более 8 строк и 8 столбцов, то есть 16 в сумме. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x+3y\le16 \end{cases}.$$

Но $2x+3y=1{,}5(x+2y)+0{,}5x=16{,}5+0{,}5x>16$ – противоречие. Следовательно, предположение неверно и пункт а) леммы доказан.

б) Аналогично пункту а) леммы обозначим число одиночных клеток за x, а число парных клеток за – $2y$. Если лемма не выполняется, то нельзя 8 клетками занять более 11 строк и столбцов в сумме. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y \le 11 \end{cases}.$$

Но $2x + 3y = 1{,}5(x + 2y) + 0{,}5x = 12 + 0{,}5x > 11$ – противоречие. Следовательно, предположение неверно и пункт б) леммы доказан.

Вернёмся к решению задачи. Рассмотрим 11 клеток с числами от 54 до 64. Из пункта а) леммы следует, что какие-то три из них второй игрок может обойти, придерживаясь условий задачи. Минимальная сумма трёх из этих чисел равна

$54 + 55 + 56 = 165$, значит второй игрок всегда может получить сумму не менее 165. Предположим, что сумму больше 165 не всегда удастся получить. Тогда никакие три из клеток с числами от 54 до 64 помимо $54, 55, 56$ не должны оказаться в одной строке/столбце или образовывать "угол" (см. рисунок 1).

При этом числа $54, 55, 56$ обязаны оказаться в одной строке/столбце или образовывать "угол", иначе найдётся другая тройка чисел с большей суммой. Если эти числа располагаются в одной строке/столбце, или образуют "угол", то занимают суммарно 4 строки и столбца. Без ограничения общности, пусть эти числа стоят так, как показано на рисунке 2, ведь если поменять какие-то строки/столбцы местами, искомая сумма не изменится.

И в том, и в другом случае оставшиеся 8 клеток с числами от 57 до 64 располагаются в выделенных прямоугольниках, количество строк и столбцов в которых суммарно равно 12. Если эти 8 клеток занимают не все строки или столбцы, то они занимают суммарно не более 11 строк и столбцов. Тогда из пункта б) леммы следует, что какие-то три числа стоят в одной строке/столбце или образуют "угол", а значит выбрав эти три клетки, мы увеличим искомую сумму. Если эти 8 клеток, среди которых x одиночных и 2y парных клеток, занимают все строки и столбцы, то имеем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases},$$

откуда $x = 0, y = 4$. Следовательно, все клетки в выделенном прямоугольнике парные. Тогда найдётся число не менее 52 (на второй таблице число 53 может дополнять серые клетки до квадрата), которое стоит в одной строке или в одном столбце с какой-то парной клеткой из выделенного прямоугольника. Взяв это число и две парные клетки, получим сумму не менее $52 + 57 + 58 = 167$. Значит примера, гарантирующего сумму 165, но не гарантирующего сумму 166, не существует.

Пример, гарантирующий сумму 166, но не гарантирующий сумму 167:

Здесь сумма 166 достигается, например, на числах $54, 55, 57$. Все остальные суммы в пределах правого нижнего прямоугольника 34 не превосходят 166. В серых клетках в произвольном порядке можно поставить числа от 37 до 46, тогда максимальная сумма в пределах правого нижнего прямоугольника 46 не будет превосходить 166, так как $60 + 59 + 46 = 165$. Оставшиеся числа можно ставить в любые из оставшихся клеток, так как максимальная ещё не рассмотренная сумма будет равна $64 + 63 + 36 = 163$.

Ответ: 166

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Верный пример без оценки	7 баллов
Доказано, что 2021 нельзя представить в виде суммы двух трёхзначных палиндромов	7 баллов
Доказано, что 2021 нельзя представить в виде суммы двух палиндромов, один из которых четырёхзначный	7 баллов
Примеры составления числа 2021 из четырёх и более палиндромов	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Верный пример с указанием центров симметрии полученных фигур	20 баллов
Неверный пример или пример, который может быть как верным, так и неверным, но без указания центров симметрии фигур это невозможно понять	0 баллов
Попытки доказательства отсутствия примера	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении потерян случай равенства каких-то двух переменных	15 баллов
Получено одно из равенств $ab + ad = 2ac, b + d = 2c, ab(a + b) = cd(c + d)$ или симметричные им	5 баллов
Проверено, что $a = b = c = d$ удовлетворяет условию задачи	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$, доведённая до верного ответа в замкнутой форме	16 баллов
Доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$	15 баллов
Доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, но итоговая формула подсчёта вариантов выписана неверно	12 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$	11 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$	8 баллов
Арифметическая ошибка на этапе подсчёта ответа по верной формуле	-2 балла
Задача решается в предположении, что 0 - натуральное число	-3 балла
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Доказана оценка на 166	15 баллов
Доказана оценка на 165	10 баллов
Доказана лемма 2 авторского решения или эквивалентное утверждение без получения оценки на 165 или 166	5 баллов
Получена оценка на 165 с использованием леммы 2 авторского решения, но сама лемма не доказана	5 баллов
Построен верный пример на 166 и доказано, что он подходит	5 баллов
Оценки на числа, отличные от 165 и 166	0 баллов
Ответы, отличные от 165 и 166	0 баллов